Задачи на перевод чисел из одной системы счисления в другую.

Система счисления — это совокупность приемов и правил, по которым числа записываются и читаются.

Существуют позиционные и непозиционные системы счисления.

В непозиционных системах счисления вес цифры (т. е. тот вклад, который она вносит в значение числа) **не зависит от ее позиции** в записи числа. Так, в римской системе счисления в числе XXXII (тридцать два) вес цифры X в любой позиции равен просто десяти.

В позиционных системах счисления вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число. Например, в числе 757,7 первая семерка означает 7 сотен, вторая — 7 единиц, а третья — 7 десятых долей единицы.

Сама же запись числа 757,7 означает сокращенную запись выражения

$700 + 50 + 7 + 0{,}7 = 7 . 10^2 + 5 . 10^1 + 7 . 10^0 + 7 . 10^{-1} = 757{,}7.$

Любая позиционная система счисления характеризуется своим **основанием.**

Основание позиционной системы счисления — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.

За основание системы можно принять любое натуральное число — два, три, четыре и т.д. Следовательно, **возможно бесчисленное множество позиционных систем**: двоичная, троичная, четверичная и т.д. Запись чисел в каждой из систем счисления с основанием q означает сокращенную запись выражения

$a_{n-1} q_{n-1} + a_{n-2} q_{n-2} + \ldots + a_1 q_1 + a_0 q_0 + a_{-1} q_{-1} + \ldots + a_{-m} q_{-m}$,

где a_i — цифры системы счисления; n и m — число целых и дробных разрядов, соответственно.

Например:

Разряды 3 2 1 0 -1

Число $1\ 0\ 1\ 1,\ 1_2 = 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1}$;

Разряды 2 1 0 -1 -2

Число $2\ 7\ 6,\ 5\ 2_8 = 2*8^2 + 7*8^1 + 6*8^0 + 5*8^{-1} + 2*8^{-2}$

Как порождаются целые числа в позиционных системах счисления?

В каждой системе счисления цифры упорядочены в соответствии с их значениями: 1 больше 0, 2 больше 1 и т.д.

Продвижением **цифры называют замену её следующей по величине**.

Продвинуть цифру 1 значит заменить её на 2, продвинуть цифру 2 значит заменить её на 3 и т.д. **Продвижение старшей цифры** (например, цифры 9 в десятичной системе) **означает замену её на 0**. В двоичной системе, использующей только две цифры — 0 и 1, продвижение 0 означает замену его на 1, а продвижение 1 — замену её на 0.

Целые числа в любой системе счисления порождаются с помощью **Правила счета** [44]:

Для образования целого числа, следующего за любым данным целым числом, нужно продвинуть самую правую цифру числа; если какая-либо цифра после продвижения стала нулем, то нужно продвинуть цифру, стоящую слева от неё.

Применяя это правило, запишем первые десять целых чисел

• в двоичной системе: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001;
• в троичной системе: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100;
• в пятеричной системе: 0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14;
• в восьмеричной системе: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11.

4.3. Какие системы счисления используют специалисты для общения с компьютером?

Кроме десятичной широко используются системы с основанием, являющимся целой степенью числа 2, а именно:
• **двоичная** (используются цифры 0, 1);
• **восьмеричная** (используются цифры 0, 1, ..., 7);
• **шестнадцатеричная** (для первых целых чисел от нуля до девяти используются цифры 0, 1, ..., 9, а для следующих чисел — от десяти до пятнадцати — в качестве цифр используются символы A, B, C, D, E, F).
Полезно запомнить запись в этих системах счисления первых двух десятков целых чисел:

0 0 0 0
1 1 1 1
2 10 2 2
3 11 3 3
4 100 4 4
5 101 5 5
6 110 6 6
7 111 7 7
8 1000 10 8
9 1001 11 9

10 1010 12 A
11 1011 13 B
12 1100 14 C
13 1101 15 D
14 1110 16 E
15 1111 17 F
16 10000 20 10
17 10001 21 11
18 10010 22 12
19 10011 23 13

Из всех систем счисления **особенно проста** и поэтому **интересна для технической реализации в компьютерах двоичная система счисления**.

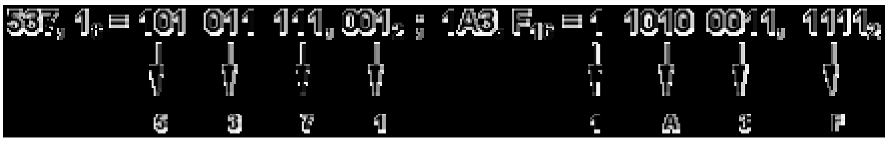
4.4. Почему люди пользуются десятичной системой, а компьютеры — двоичной?

Люди предпочитают десятичную систему, вероятно, потому, что с древних времен считали по пальцам, а пальцев у людей по десять на руках и ногах. Не всегда и не везде люди пользуются десятичной системой счисления. В Китае, например, долгое время пользовались пятеричной системой счисления.
А компьютеры используют двоичную систему потому, что она имеет ряд преимуществ перед другими системами:
• для ее реализации нужны **технические устройства с двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.), а не, например, с десятью, — как в десятичной;
• представление информации посредством только двух состояний **надежно** и **помехоустойчиво**;

• возможно **применение аппарата булевой алгебры** для выполнения логических преобразований информации;
• двоичная арифметика намного проще десятичной.
Недостаток двоичной системы — **быстрый рост числа разрядов**, необходимых для записи чисел.

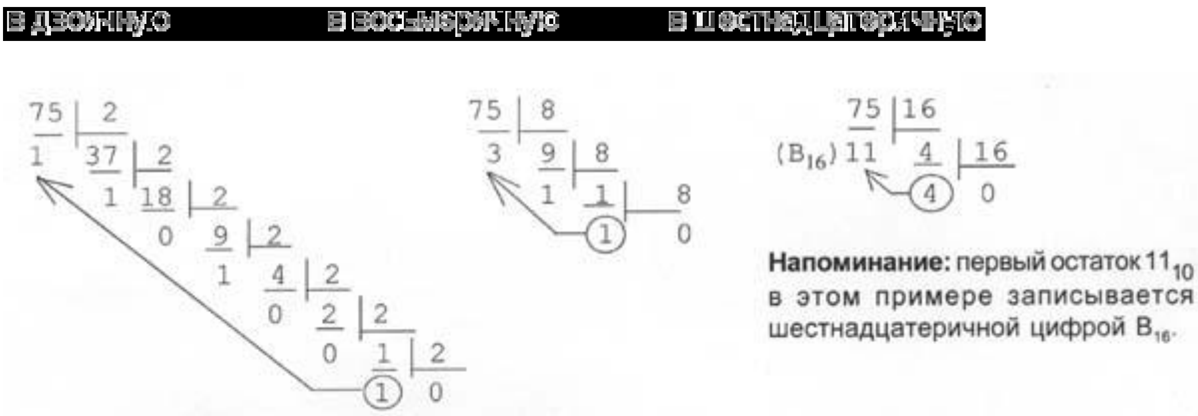
4.5. Почему в компьютерах используются также восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления?

Двоичная система, удобная для компьютеров, для человека неудобна из-за ее громоздкости и непривычной записи.
Перевод чисел из десятичной системы в двоичную и наоборот выполняет машина. Однако, чтобы профессионально использовать компьютер, следует научиться понимать слово машины. Для этого и разработаны восьмеричная и шестнадцатеричная системы. Числа в этих системах читаются почти так же легко, как десятичные, требуют соответственно в три (восьмеричная) и в четыре (шестнадцатеричная) раза меньше разрядов, чем в двоичной системе (ведь числа 8 и 16 — соответственно, третья и четвертая степени числа 2).
Перевод восьмеричных и шестнадцатеричных чисел в двоичную систему очень прост: достаточно каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой (тройкой цифр) или тетрадой (четверкой цифр).
Например:



Как перевести целое число из десятичной системы в любую другую позиционную систему счисления?

Для перевода целого десятичного числа *N* в систему счисления с основанием *q* необходимо *N* разделить с остатком ("нацело") на *q* , записанное в той же десятичной системе. Затем неполное частное, полученное от такого деления, нужно снова разделить с остатком на *q* , и т.д., пока последнее полученное неполное частное не станет равным нулю. Представлением числа *N* в новой системе счисления будет последовательность остатков деления, изображенных одной *q*-ичной цифрой и записанных в порядке, обратном порядку их получения.
Пример: Переведем число 75 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную:

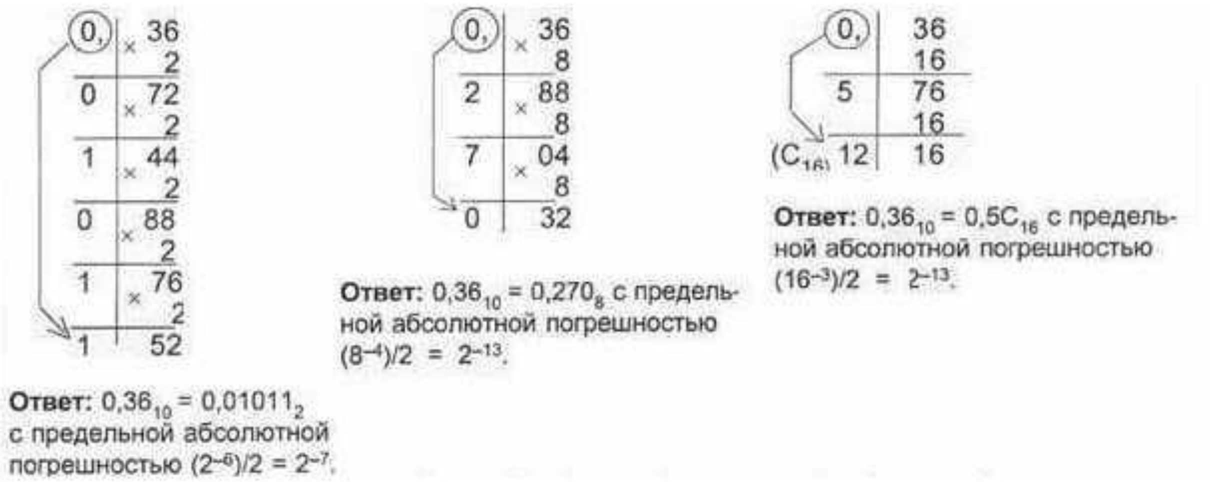


Ответ : $75_{10} = 1\ 001\ 011_2 = 113_8 = 4B_{16}$.

Как перевести правильную десятичную дробь в любую другую позиционную систему счисления?

Для перевода правильной десятичной дроби *F* в систему счисления с основанием *q* необходимо *F* умножить на *q* , записанное в той же десятичной системе, затем дробную часть полученного произведения снова умножить на *q,* и т. д., до тех пор, пока дробная часть очередного произведения не станет равной нулю, либо не будет достигнута требуемая точность изображения числа *F* в *q*-ичной системе. Представлением дробной части числа *F* в новой системе счисления будет последовательность целых частей полученных произведений, записанных в порядке их получения и изображенных одной *q*-ичной цифрой. Если требуемая точность перевода числа *F* составляет *k* знаков после запятой, то предельная абсолютная погрешность при этом равняется $q^{-(k+1)}/2$.

Пример. Переведем число 0,36 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную:



Как перевести число из двоичной (восьмеричной, шестнадцатеричной) системы в десятичную?

Перевод в десятичную систему числа *x*, записанного в *q*-ичной системе счисления (*q* = 2, 8 или 16) в виде $x_q = (a_n a_{n-1} \ldots a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_q$ сводится к вычислению значения многочлена

$x_{10} = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \ldots + a_{-m} q^{-m}$

средствами десятичной арифметики.

Примеры: