

## Оглавление

Лабораторная работа № 1. Работа с РСУБД. Разработка ER модели.....	3
1 Постановка задачи.....	3
2 Работа в СУБД LO Base (HSQL).....	3
3 Самостоятельно.....	8
4 Контрольные вопросы.....	8
Лабораторная работа № 2. Связи между таблицами. Индексы. Нормализация БД и запросы.....	9
1 Постановка задачи.....	9
2 Выполнение работы.....	9
3 Самостоятельно.....	14
4 Контрольные вопросы.....	14
Лабораторная работа № 3. Основы работы в системе компьютерной алгебры.....	15
1 Основы работы.....	15
2 Самостоятельно.....	20
3 Контрольные вопросы.....	21
Лабораторная работа № 4. Основы математического анализа с CAS Maxima.....	22
1 Дифференцирование и пределы.....	22
2 Задача поиска минимума и максимума функции в заданной области.....	24
3 Задача поиска условного экстремума.....	25
2 Контрольные вопросы.....	26
3 Задачи для решения.....	26
Лабораторная работа № 5. Работа в Wolfram Alfa.....	27
1 Основные сведения о WolframAlpha.....	27
2 Решение уравнений, систем уравнений.....	27
3 Построение графиков функций.....	29
4 Исследование функций.....	31
5 Матричные операции.....	35
6 Задачи для решения.....	36
Лабораторная работа № 6. Задачи оптимизации в случае нескольких игроков.....	36
1 Работа в Gambit.....	37
2 Задачи для решения.....	39
Лабораторная работа № 7. Язык статистического программирования R: основы.....	39
1. Почему R?.....	39
2. Установка R.....	40
3. Конфигурирование среды.....	40
4. Анализ данных.....	41
5. Самостоятельно.....	45

## Лабораторная работа № 1. Работа с РСУБД. Разработка ER модели.

Применяемая РСУБД: Libreoffice Base (HSQL)

- Libreoffice Base не является РСУБД в полном смысле этого слова. Разработчики определяют Base как front-end, то есть средство для создание интерфейса, а не средство хранения данных. Тем не менее, Base поставляется с полноценным ядром РСУБД HSQL и может применяться для создания однопользовательских приложений.
- Front-end (фронт-энд) — это интерфейсная часть — то, с чем непосредственно оперирует пользователь. Back-end (бэк-энд) — скрытая от пользователя часть, обычно клиент-серверная СУБД, к которой пользователь обращается с использованием фронт-энда.

Набор данных: mpg-auto.csv

Цель работы: изучение работы с данными в формате CSV, построение простейшей БД.

### 1 Постановка задачи

Изучается вопрос о степени связи между характеристиками легкового автомобиля и потреблением горючего (миль на галлон). Для этого собираются следующие характеристики:

Поле	Описание	Тип (в СУБД LO Base)
cylinders	Количество цилиндров	Целое (tinyint)
displacement	Объем цилиндра	Целое (int)
horsepower	Л.с.	Целое (int)
weight	Масса	Целое (int)
acceleration	Выход двигателя на режим	Действительное (float)
model_year	Год выпуска	Целое (smallint)
MPG	Миль на галлон	Действительное (float)

producer	Производитель	Строка (varchar)
----------	---------------	------------------

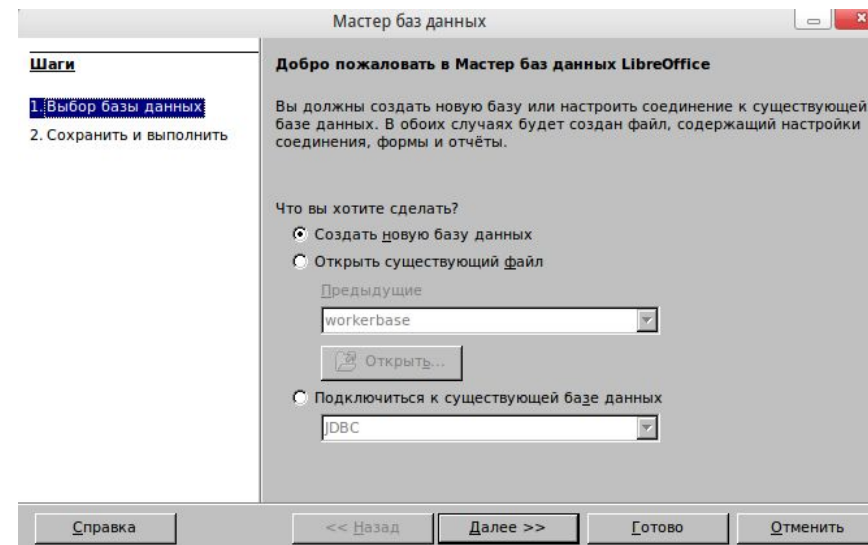
Необходимо создать БД для хранения этих данных.

### 2 Работа в СУБД LO Base (HSQL)

1. Запустите LO Base



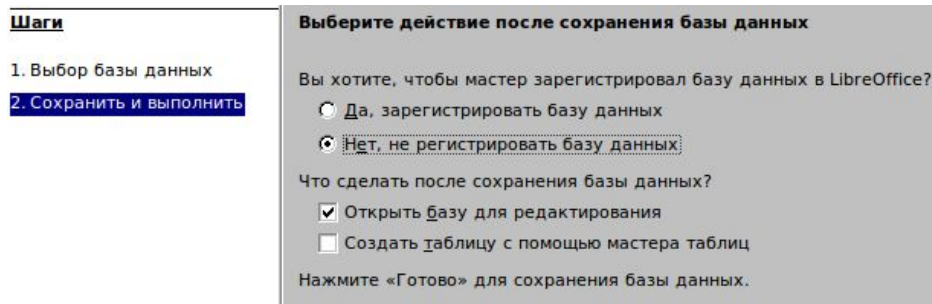
2. На экране появится окно мастера создания новой БД:



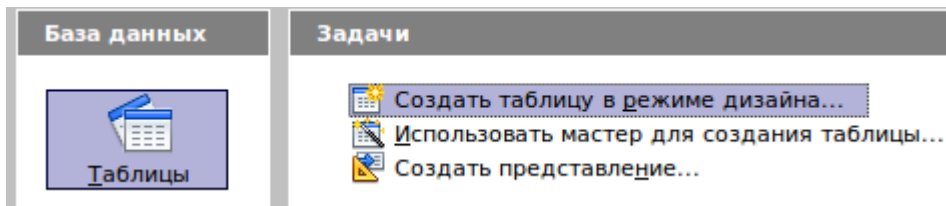
На первом шаге Вам предлагается выбор — создать новую БД, открыть существующий файл, либо подключиться к БД (обычно используется

этот вариант — подключение к имеющейся БД под управлением клиент-серверной СУБД). Оставьте выбор по умолчанию - **Создать новую базу данных** и нажмите кнопку **Далее**.

3. На втором шаге мастера предлагается зарегистрировать БД (это открывает возможность для использования данной БД при подготовке документов, содержащих поля слияния) и выбрать действия для дальнейшей работы. Сконфигурируйте окно так, как показано ниже и нажмите кнопку **Готово**.



4. На экран будет выведено главное окно Base. Выберите вкладку **Таблицы** и дважды щелкните по пункту элементу списка **Создать таблицу в режиме дизайна...** (в зависимости от типа ОС может быть достаточно одинарного щелчка)



5. Окно дизайна таблицы предназначено для автоматизации создания таблиц. Для этого указываются имена, типы полей и описания — комментарии, позволяющие понять назначение каждого из полей. Каждое из полей имеет дополнительные настройки, варьирующиеся в зависимости от типа поля. Основные типы полей:

Название	Тип	Размер (диапазон)
----------	-----	-------------------

Числовые поля (целые)		
BOOLEAN	да/ нет	1 байт (0,1)
TINYINT	байт	1 байт (0..255)
SMALLINT	Короткое целое	2 байта (-2 <sup>15</sup> .. 2 <sup>15</sup> -1)
INTEGER	целое	4 байта (-2 <sup>31</sup> to 2 <sup>31</sup> -1)
BIGINT	Большое целое	8 байт (-2 <sup>63</sup> to 2 <sup>63</sup> -1)
Числовые поля (действительные)		
REAL	С плавающей точкой (одинарная точность)	4 байта (2 <sup>-1074</sup> .. (2-2 <sup>-52</sup> )* 2 <sup>1023</sup> )
DOUBLE	С плавающей точкой (двойная точность)	4 байта (2 <sup>-1074</sup> .. (2-2 <sup>-52</sup> )* 2 <sup>1023</sup> )
Текст		
VARCHAR	текст	До 2 Гб на 32-х битной системе
Дата, время		
DATE	дата	День, месяц, год
TIME	время	Часы, минуты, секунды

- Для создания первичного ключа часто используют большое целое поле с опцией «Автоинкремент». Это соответствует подходу использования суррогатных ключей.

**Естественный Ключ (ЕК)** - набор атрибутов описываемой записью сущности, уникально её идентифицирующий (например, номер паспорта для человека);

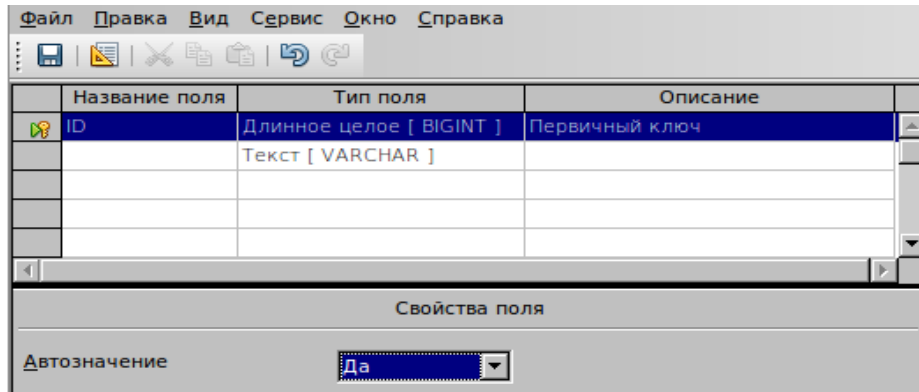
**Суррогатный Ключ (СК)** - автоматически сгенерированное поле, никак не связанное с информационным содержанием записи. Обычно в роли СК выступает автоинкрементное поле типа INTEGER.

При прочих равных использование суррогатных ключей

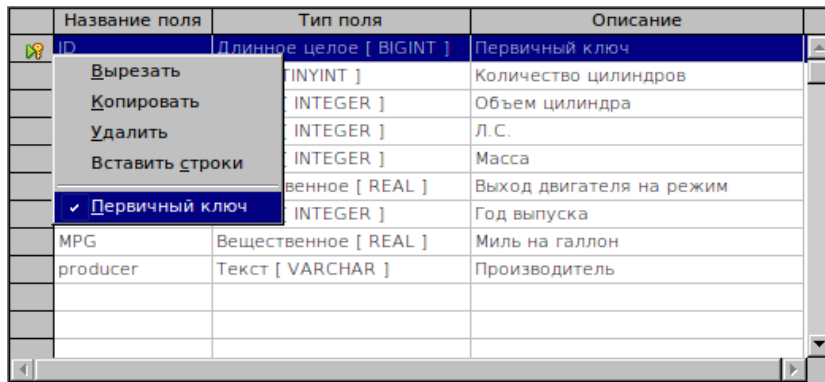
предпочтительно

- Булевские поля используют для бинарных классификаторов (пол, кодирование да-нет и т.п.)

6. Создадим поле первичного ключа. **Название поля** — ID, **Тип поля** — Bigint, **Автозначение** - «Да», **Описание** - «Первичный ключ».

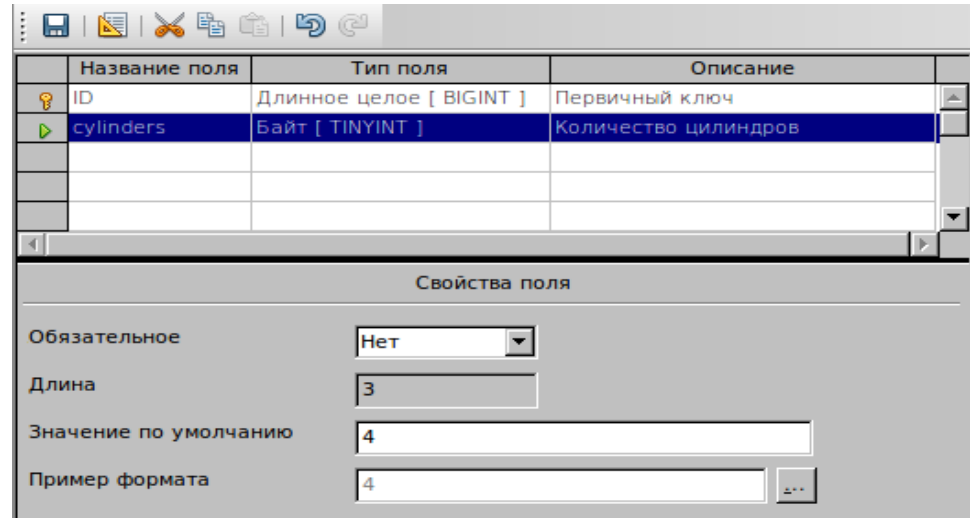


7. Первичный ключ создается одинарным щелчком по ключевому полю левой кнопкой мыши, либо с помощью выбора пункта контекстного меню **Первичный ключ**. Если все выполнено верно — рядом с названием поля появится изображение ключа.



- Это действие может быть выполнено в любой момент времени в ходе создания таблицы.

8. Создадим поле для хранения данных о количестве цилиндров. **Название поля** — cylinders, **Тип поля** — Tinyint, **Описание** - «Количество цилиндров».



Обратите внимание на свойства «Обязательное» и «Значение по умолчанию»

- В том случае, если принципиально отсутствие пустых значений в поле — ставьте требование обязательности. Но не стоит переусердствовать — это может негативно отразиться на качестве работы оператора.
- Значение по умолчанию выставляется в том случае, когда ожидается наличие какого-то часто встречающегося значения. В данном случае чаще всего можно ожидать четырехцилиндровых двигателей. Именно поэтому **Значение по умолчанию** выставлено в 4.

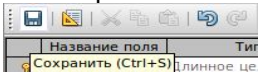
9. Создайте все оставшиеся поля по таблице в описании задачи. Оцените количество символов в текстовом поле и не забудьте задать его в

свойствах.

	Название поля	Тип поля	Описание
🔑	ID	Длинное целое [ BIGINT ]	Первичный ключ
	cylinders	Байт [ TINYINT ]	Количество цилиндров
	displacement	Целое [ INTEGER ]	Объем цилиндра
	horsepower	Целое [ INTEGER ]	Л.С.
	weight	Целое [ INTEGER ]	Масса
	acceleration	Вещественное [ REAL ]	Выход двигателя на режим
	model_year	Целое [ INTEGER ]	Год выпуска
	MPG	Вещественное [ REAL ]	Миль на галлон
	producer	Текст [ VARCHAR ]	Производитель

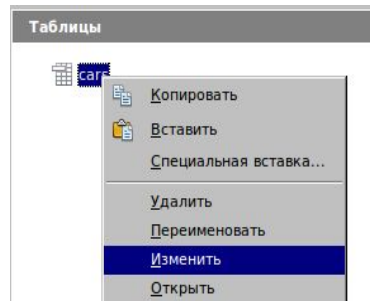
● Названия полей должны быть сформированы исключительно с применением латиницы и цифр. Использование названий полей с применением символов национальных алфавитов, пробелов, специальных символов (за исключением подчеркивания - «\_») запрещается либо на уровне СУБД, либо дополнительными требованиями. Нарушения приводят к тяжелым последствиям при написании программного кода.

10. Выполните сохранение таблицы с именем cars одним из трех способов:

нажмите ctrl+S, кнопку на панели инструментов  либо выбрав в контекстном меню команду **Файл → Сохранить**.

11. Закройте окно дизайнера таблицы.

12. Изменить структуру, название, удалить таблицу всегда можно с помощью контекстного меню:



13. Переименуйте созданную таблицу в tblCars.

● Хороший тон при именовании таблиц — название говорит само за себя, используется приставка tbl, каждое новое слово начинается с большой буквы. Так же, как и в названии полей — разрешено использование только символов латиницы, цифр, нижнего подчеркивания (можно, но не рекомендуется — лучше использовать капитализацию — каждое новое слово в названии с большой буквы).

14. Откройте таблицу двойным щелчком, либо с помощью контекстного меню:



Теперь в таблицу можно вводить значения.

15. Откройте файл mpg-auto.csv.

● Формат CSV (Comma Separated Values) наиболее универсальный для передачи данных между пользователями. Файл CSV— текстовое представление таблицы, в котором каждая строка — это набор значений, между которыми имеется какой-либо разделитель, определяемый пользователем (пробел, табуляция, запятая и пр.). Разделители соответствуют границам полей. Первая строка может содержать имена полей.

● Такие файлы чаще всего открываются в электронных таблицах, но надо иметь в виду, что количество строк в нем может быть ограничено только особенностями файловой системы, в то время как число строк рабочей книги — особенностями табличного процессора.

● При работе с файлами CSV помните, что в западных странах разделить целой и дробной части — запятая. Используйте это в фильтре. В Calc для указания этого факта выделяется нужный столбец (или группа столбцов) и указывается **Тип столбца**

## «Английский (США)».

В нашем случае: разделитель полей — запятая, разделитель целой и дробной части — запятая:

Импорт

Кодировка: Юникод (UTF-8)

Язык: Стандарт - Русский

Со строки: 1

Параметры разделителя

Фиксированная ширина

Разделитель

Табуляция  Запятая  Другие

Точка с запятой  Пробел

Объединять разделители

Разделитель текста: "

Другие параметры

Поля в кавычках как текст

Распознавать особые числа (даты и т.п.)

Поля

Тип столбца

	Стандарт	Стандарт	Стандарт	Стандарт	Стандарт	Стандарт	Стандарт
1	cylinders	displacement	horsepower	weight	acceleration	model year	MPG
2	8	307	130	3504	12	70	18

16. Выделите диапазон значений в mpg-auto.csv и скопируйте их в буфер обмена. Весь диапазон выделяется без прокрутки двумя нажатиями комбинаций клавиш.

- При работе с большими массивами в электронной таблице используйте набор сочетаний клавиш для выделения диапазона:  
**Ctrl+Shift+←** - выделение от текущей ячейки до последней в связанном диапазоне справа  
**Ctrl+Shift+→** - выделение от текущей ячейки до последней в связанном диапазоне слева  
**Ctrl+Shift+↑** - выделение от текущей ячейки до последней в связанном диапазоне сверху  
**Ctrl+Shift+↓** - выделение от текущей ячейки до последней в связанном диапазоне снизу

## То же, без Shift — перемещение без выделения.

17. Щелкните правой кнопкой мыши по области таблиц Base и выберите пункт **Вставить**. С помощью мастера вставки таблиц сформируйте таблицу tblFromCSV. Не забудьте корректно определить типы полей.

- На больших объемах данных способ предельно непродуктивен. Собственно, для больших наборов Base и не предназначен.

18. Удалите ранее созданную таблицу tblCars.

19. Переименуйте tblFromCSV в tblCars.

20. Ситуация с таблицей крайне неприятная. Она не соответствует одной из нормальных форм (какой?) и поэтому должна быть нормализована. Для этого названия производителей должны быть вынесены в отдельную таблицу.

21. Создайте таблицу для хранения названий производителей с именем slvManufacturer. В таблице должно быть два поля — Name, для хранения названий и первичный ключ ID. Название производителя не может отсутствовать.

22. Заполните таблицу slvManufacturer (поле Name) следующими записями:

amc	datsun	mercury	subaru(347)
audi	dodge	nissan	toyota
bmw	fiat	oldsmobile	toyouta
buick	ford	opel	triumph
cadillac	hi	peugeot	volkswagen
capri	honda	plymouth	volkswagen
chevroelt	maxda	pontiac	volvo
chevrolet	mazda	renault	vw
chevy	mercedes	saab	
chrysler	mercedes-benz	subaru	

Соблюдайте регистр. Внимательно смотрите на написание.

23. Закончите работу, закрыв все таблицы и Base.

### **3 Самостоятельно**

24. Ответьте на вопрос о том, какие требования к структуре таблиц нарушены? Как можно изменить структуру для более продуктивной работы?
25. Нарисуйте на листе бумаги ER модель правильно сформированной БД.
26. Допустим, что в испытаниях машин участвуют несколько водителей. Каждый водитель ведет по нескольку машин. Можно предположить, что есть связь между расходом топлива и водителем. Как хранить эту информацию? Измените ER-модель БД соответствующим образом.
27. Какие еще данные могут быть использованы для анализа расхода топлива? Как хранить такие данные? Измените ER-модель БД соответствующим образом.

### **4 Контрольные вопросы**

1. Дайте определение базы данных.
2. Дайте определение системы управления базами данных.
3. Дайте определение отношению в реляционной модели.
4. Что такое кортеж, поле (атрибут), домен? Поясните на примере.
5. Приведите соотношения в названиях основных объектов реляционной БД в табличной и реляционной терминологии?
6. Что такое первичный ключ? Для чего определяют первичные ключи?
7. Что такое внешний ключ? Для чего определяют внешние ключи?
8. Какие требования накладываются на отношение?
9. Что такое первая нормальная форма? Приведите пример приведения таблицы к первой нормальной форме.
10. Что такое вторая нормальная форма? Приведите пример приведения таблицы ко второй нормальной форме.
11. Что такое третья нормальная форма?
12. Приведите классификацию СУБД по архитектуре. Поясните различия между классами. Приведите примеры СУБД каждого класса.
13. Приведите классификацию СУБД по модели хранения данных. Поясните различия между классами. Приведите примеры СУБД каждого класса.
14. Приведите классификацию СУБД по способу доступа. Поясните

различия между классами. Приведите примеры СУБД каждого класса.

15. Что такое ER модель?
16. Какие виды связей между отношениями БД могут существовать?
17. Что такое front-end и back-end?
18. Какие типы числовых полей могут присутствовать в таблице БД (на примере LO Base)?
19. Какие типы текстовых полей, полей даты-времени могут присутствовать в таблице БД (на примере LO Base)?
20. Что такое естественный первичный ключ?
21. Что такое суррогатный первичный ключ?
22. Какие действия должны быть предприняты для создания поля, в обязательном порядке имеющего значения?
23. Какие требования накладываются на имена таблиц и полей в БД?
24. Какой файл можно назвать файлом в формате CSV?

## Лабораторная работа № 2. Связи между таблицами. Индексы. Нормализация БД и запросы.

**Применяемая РСУБД:** Libreoffice Base (HSQL)

**БД:** созданная в результате выполнения LPN№1

**Цель работы:** получение навыков в связывании таблиц. Одно и двухтабличные запросы на выборку.

### 1 Постановка задачи

БД создана. Необходимо дополнить ее своими таблицами, после чего провести работу по нормализации и связыванию. На первом этапе нужно удалить поле producer из tblCars и заменить его внешним ключом. Далее необходимо настроить связи и попытаться получить основные характеристики выборки. В частности: количество автомобилей по производителям, по количеству цилиндров, году выпуска, оценить распределение по парам этих характеристик.

### 2 Выполнение работы

1. Дополните БД таблицами, которые были сформированы в предыдущей работе, самостоятельной части.
2. Для связывания таблиц используется пара внешний ключ (foreign key) — первичный ключ (primary key). Необходимо четко представлять себе определения этих понятий.

● Напомним, что атрибут, значение которого однозначно идентифицирует кортежи, называется ключевым (или просто ключом). Отношение может содержать несколько ключей. Всегда один из ключей объявляется первичным, его значения не могут обновляться. Все остальные ключи отношения называются возможными ключами.

● Для отражения функциональных зависимостей между кортежами разных отношений используется дублирование первичного ключа одного отношения (родительского) в другое (дочернее). Атрибуты, представляющие собой копии ключей родительских отношений, называются внешними ключами. для

каждого значения внешнего ключа, появляющегося в дочернем отношении, в родительском отношении должен найтись кортеж с таким же значением первичного ключа.

В БД на предыдущем занятии были созданы две таблицы: tblCars и slvManufacturer. Для slvManufacturer tblCars является дочерней таблицей, следовательно необходимо обеспечить для связи этих таблиц внешний ключ в tblCars.

● То, что будет происходить далее наиболее полно отражает путь человека, которому досталось в наследство нечто, что по ошибке было названо «базой данных». Оцените все сложности по нормализации таблиц. Вообще же, такой ситуации не должно быть — хорошо созданная ER модель позволяет избегать таких ситуаций.

3. Создайте в tblCars поле с именем IDManufacturer. Его тип должен полностью соответствовать типу поля ID в tblManufacturer.

● Вообще, так как внешний ключ является копией первичного — их типы должны совпадать. Иначе, при формировании связи между таблицами возникнет исключительная ситуация.

4. Опять переключимся на таблицу производителей. В таблице slvManufacturer поле Name уникально — дублирований нет. Именно поэтому для данного поля необходимо создать индекс. Кроме того, это ускорит поиск по данному полю.

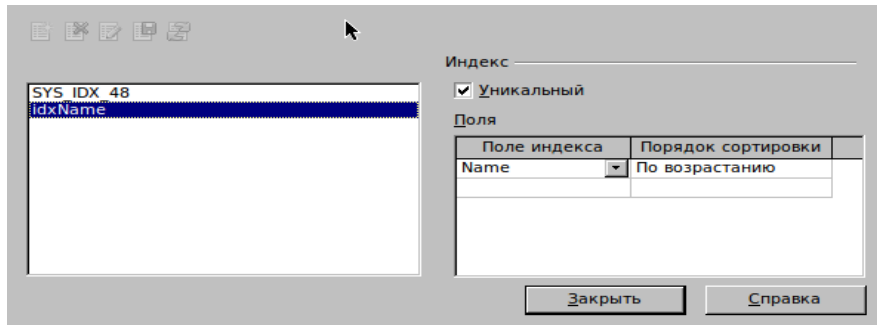
● В базах данных для ускорения поиска информации в таблицах применяются специальные структуры - индексы. При отсутствии индексов сканирование записей таблицы осуществляется последовательно в порядке их физического размещения. Наличие индексов предполагает, что анализ записей производится в соответствии с возрастанием/убыванием значений полей, из которых сформирован индекс таблицы.<sup>1</sup>

● Вообще индексы должны создаваться для всех комбинаций поисковых полей. Но без «фанатизма».

<sup>1</sup> [http://citforum.ru/database/sql\\_any/sql\\_057.shtml](http://citforum.ru/database/sql_any/sql_057.shtml)

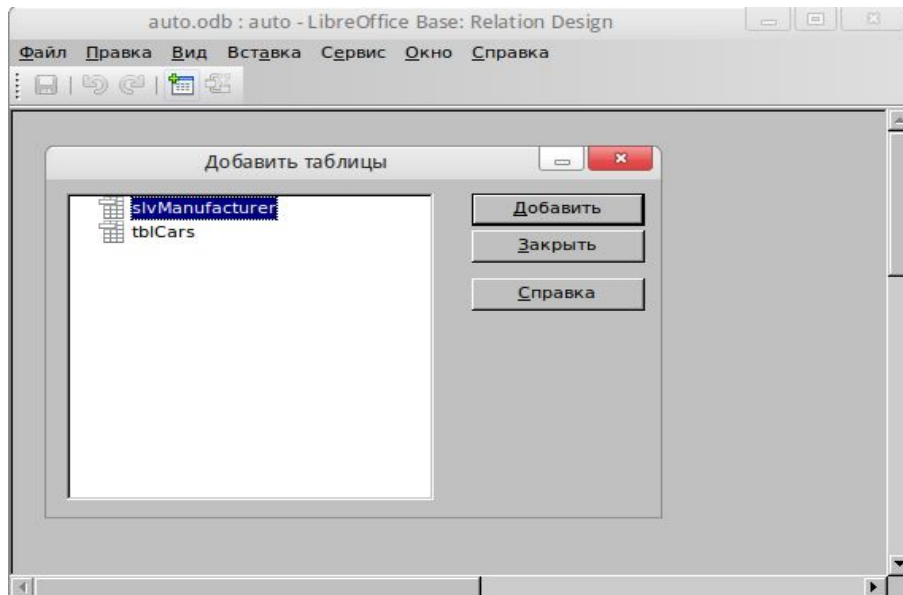


5. Откройте таблицу slvManufacturer в режиме дизайна и нажмите кнопку **Индексы**. Постройте индекс указанным образом.

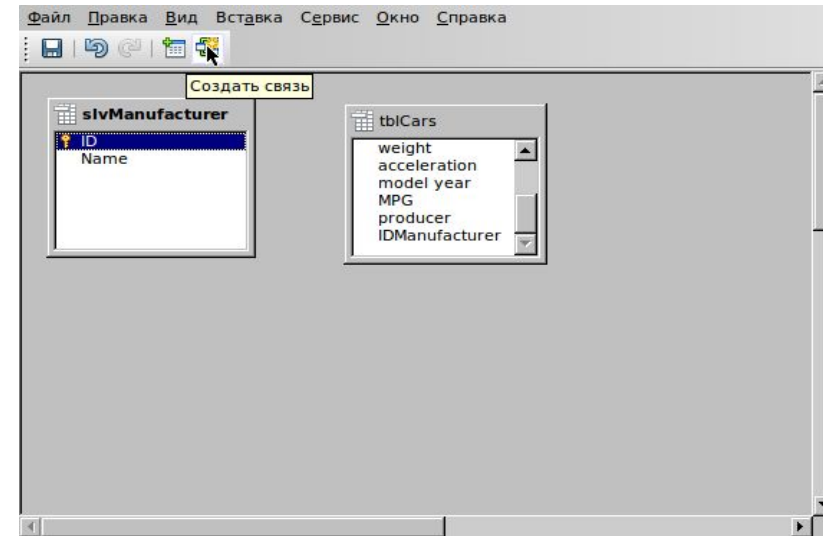


6. Сохраните изменения и закройте окно Дизайнера таблицы.

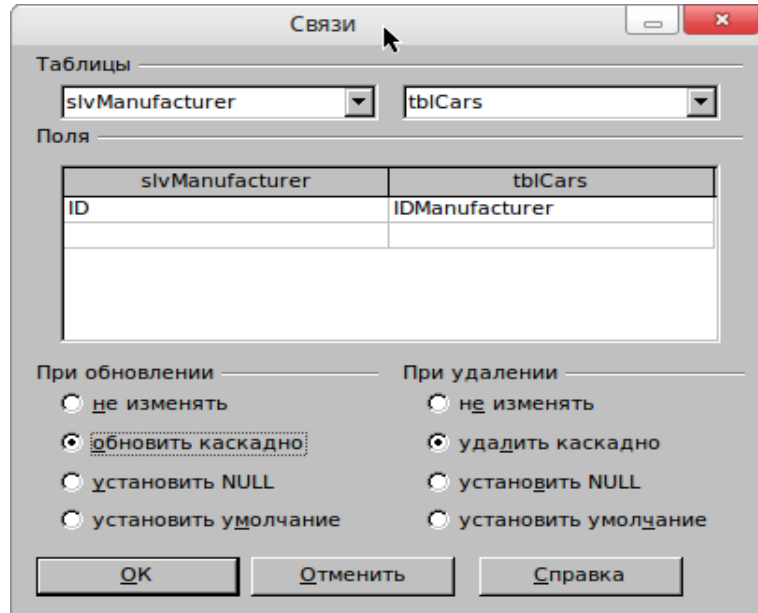
7. Выполните команду **Сервис → Связи** главного меню. Результат — мастер создания связей:



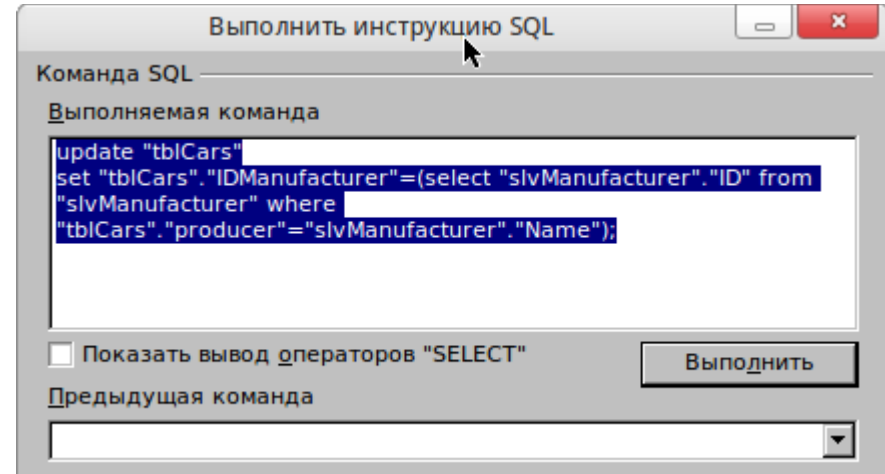
8. Добавьте таблицы slvManufacturer и tblCars в мастер. Нажмите на кнопку «Содать СВЯЗЬ»



9. Создайте связь:



10. Сохраните связь.
11. Проведите процедуру построения связей для всех созданных Вами таблиц.
12. Закройте окно мастера связей.
13. Для копирования ID, соответствующего названиям компаний в таблицу необходимо выполнить запрос на обновление. Для этого выполните команду главного меню **Сервис → SQL**.
14. В редакторе Выполняемая команда введите запрос на обновление:



Рассмотрим запрос детально:

update "tblCars"	Обновить "tblCars"
set "tblCars"."IDManufacturer"=(	установить значение поля
select "slvManufacturer"."ID" from	"IDManufacturer" в
"slvManufacturer"	выбранное из "slvManufacturer"."ID"
where	в том случае, когда названия
"tblCars"."producer"="slvManufactur	производителей совпадают
er"."Name");	

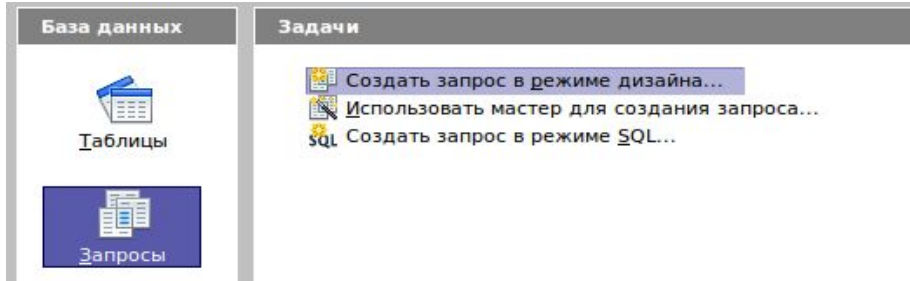
Если все прошло успешно — закройте окно и убедитесь, что в таблице появились значения.

- **Имена объектов в диалекте HSQL берутся в кавычки, в отличие от стандарта SQL**
- **Запросы на SQL интуитивно понятны. Для прочтения запросов необходимо знать небольшого количества слов английского языка. Просто читайте запрос, либо формулируйте его на русском языке и переводите на английский.**
- **Запрос заканчивается точкой с запятой**

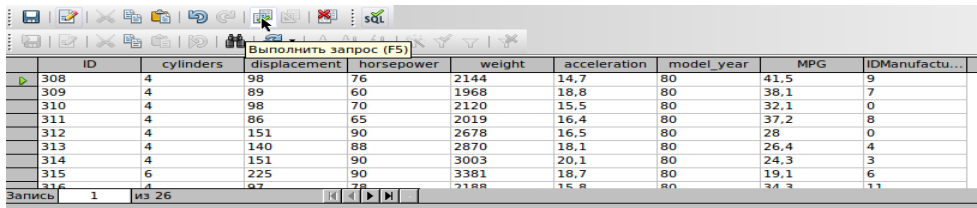
15. Теперь удалим поле producer из tblCars. Сделайте это с помощью дизайнера таблиц.

16.

17. Таблицы приведены ко второй НФ. Теперь можно приступить к формированию запросов. Потренируемся для начала на простейших запросах на выборку на одну таблицу. Для этого используется конструктор запросов. Перейдите на вкладку **Запросы** и выполните команду **Создать запрос в режиме дизайна**.

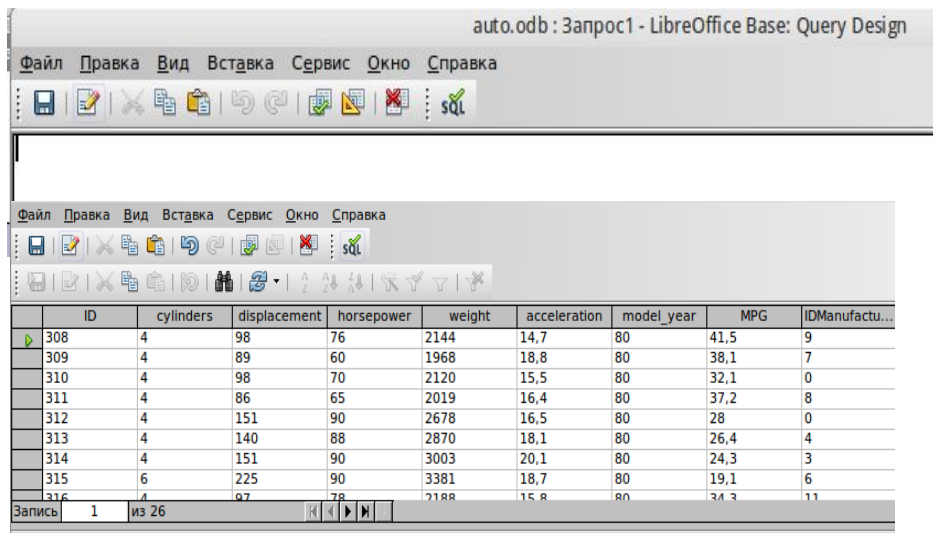


В появившемся окне добавьте к запросу таблицу tblCars. После этого переключитесь в режим SQL, выключив вид дизайна:



```
select *
from "tblCars"
where "model_year"=80;
```

Результат — окно вида:



```
select *
from "tblCars"
where ("cylinders">=6) and ("cylinders"<=8);
```

18. Выберем все записи о машинах, произведенных в 1980 году. Для этого наберите в окне запрос:

```
select *           Выбрать все поля
from "tblCars"    Из таблицы "tblCars"
where "model_year"=80;  где значения в поле "model_year" равны 80
```

● Если выбираются все поля — ставится символ \*. Частичный выбор полей подразумевает их перечисление.

19. Сохраните запрос с именем qryModelYear80

20. Выберите данные о машинах, с количеством цилиндров от 6 до 8:

```
select *           Выбрать все поля
from "tblCars"    Из таблицы "tblCars"
where ("cylinders">=6) and ("cylinders"<=8);  где значения в поле "cylinders" от 6 до 8
```

Этот же запрос можно сформулировать и так:

```
select *           Выбрать все поля
from "tblCars"    Из таблицы "tblCars"
where "cylinders" between 6 and 8;  где значения в поле "cylinders" от 6 до 8
```

21. Упорядочить результаты предыдущего запроса по увеличению количества цилиндров и уменьшению мощности. Отобрать только количество цилиндров, мощность и год производства модели:

	cylinders	horsepower	model_year
▶	6	165	78
	6	133	78
	6	132	80
	6	125	78
	6	122	73
	6	120	81
	6	120	78
	6	116	81
	6	115	79

Запись 1 из 185

```
select "cylinders", "horsepower", "model_year"
from "tblCars"
where "cylinders" between 6 and 8
order by "cylinders" ASC, "horsepower" DESC;
```

select "cylinders", "horsepower", "model\_year"  
from "tblCars"  
where "cylinders" between 6 and 8  
order by "cylinders" ASC, "horsepower" DESC;

Выбрать количество цилиндров, мощность, год  
Из таблицы "tblCars"  
где значения в поле "cylinders" от 6 до 8  
упорядочить по цилиндрам по возрастанию (ASC), по мощности (DESC)

- Если необходимо отобразить записи, у которых значение в каком либо поле пусто, используется конструкция Is Null. Пример: where "cylinders" Is Null.
- Для сортировки используется секция ORDER BY. Ключевое слово ASC соответствует сортировке по возрастанию, DESC — по убыванию.

22. В запросе могут быть использованы вычисления. Могут быть использованы знаки арифметических операций и различные функции, с полным списком которых можно ознакомиться здесь: <http://hsqldb.org/doc/guide/builtinfuctions-chapt.html>

select "MPG"/"weight", "horsepower"/"weight"  
from "tblCars";

Рассчитать отношение расхода и веса, мощности и веса по данным из таблицы "tblCars"

Создайте запрос, выводящий расход горючего на цилиндр.

● Здесь и далее — каждый из запросов сохраняется в созданном файле.

23. Для агрегации данных могут быть использованы следующие функции:

Функция	Описание	Пример
AVG	Позволяет рассчитать среднее значение	select "cylinders", avg("horsepower") from "tblCars" group by "cylinders";
MIN	Позволяет рассчитать минимальное значение	select "cylinders", min("horsepower") from "tblCars" group by "cylinders";
MAX	Позволяет рассчитать максимальное значение	select "cylinders", max("horsepower") from "tblCars" group by "cylinders";
SUM	Позволяет рассчитать сумму значений	select "model_year", sum("horsepower")/sum("cylinders") from "tblCars" group by "model_year";
COUNT	Позволяет рассчитать количество значений	select "slvManufacturer"."Name", count("tblCars"."ID") from "tblCars" Inner Join "slvManufacturer" on "tblCars"."IDManufacturer"="slvManufacturer"."ID" group by "slvManufacturer"."Name" order by "slvManufacturer"."Name" ASC;

Выполните примеры, приведенные в таблице. Определите смысловую

нагрузку запросов.

24. Постройте запрос, определяющий среднее значение мощности автомобиля по производителям
25. Постройте запрос, определяющий минимальную и максимальную мощность автомобилей в разрезе по количеству цилиндров
26. Постройте запрос, определяющий минимальное и максимальное количество цилиндров в двигателе по производителям
27. Постройте запрос, показывающий средний расход горючего на единицу веса в разрезе по производителям, сортировка по производителям, по возрастанию.
28. Постройте запрос, показывающий средний расход горючего на единицу веса в разрезе по количеству цилиндров, сортировка по рассчитанному значению, по убыванию.
29. Постройте запрос, выводящий среднюю мощность, группировка по производителю и количеству цилиндров, сортировка по количеству цилиндров (по убыванию), по производителю (по возрастанию)

### **3 Самостоятельно**

30. Изучите материалы:

Краткое руководство пользователя OpenOffice.org Base (часть I)

Краткое руководство пользователя OpenOffice.org Base (часть II)

Сайт: <http://myooo.ru/content/blogsection/13/97/>

31. Создайте простейшую однопользовательскую форму

### **4 Контрольные вопросы**

1. Что такое внешний ключ?
2. Что такое первичный ключ?
3. Какие свойства связи необходимо настроить после ее создания?
4. Что такое индекс? Какие типы индексов существуют? Зачем применяются индексы?
5. Что такое запрос?
6. Какие виды запросов вы знаете?
7. Опишите основные секции запроса на выборку?

8. Как организуется сортировка в запросе на выборку?
9. Как организуется отбор значений по условию в запросе на выборку?
10. Могут ли выполняться арифметические операции в запросе? Если — да, приведите пример.
11. Как отбираются пустые значения в запросе на выборку?
12. Что означает символ «\*» после ключевого слова select?
13. Для чего применяется ключевое слово distinct в запросах на выборку?
14. Для чего используется секция group by в запросе на выборку?
15. Какие агрегирующие функции вам известны?
16. Опишите общий синтаксис запроса на обновление.
17. Опишите общий синтаксис запроса на удаление.
18. Опишите общий синтаксис запроса на вставку.

## Лабораторная работа № 3. Основы работы в системе компьютерной алгебры

Применяемая CAS: Maxima (wxMaxima)

Цель работы: получение навыков в работе с Maxima.

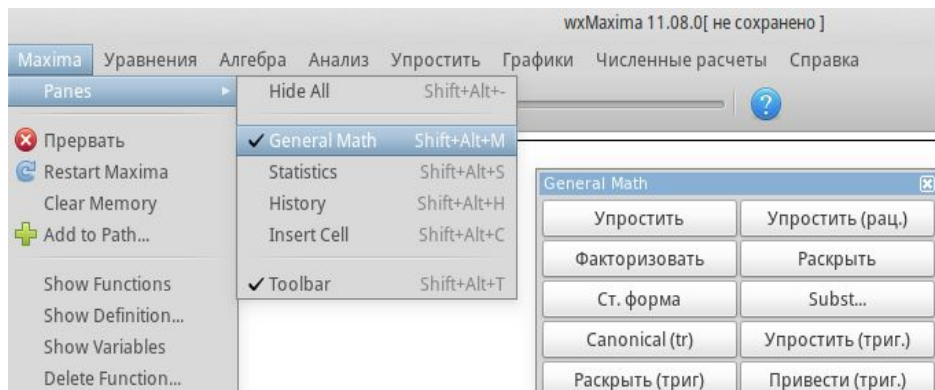
Отчет: файл, сформированный в CAS Maxima

### 1 Основы работы

Система компьютерной алгебры Maxima позволяет выполнять численные и символические расчеты используя язык, близкий к используемому в математике.

Maxima имеет несколько GUI, из которых можно выделить wxMaxima и xMaxima. Первая из перечисленных оболочек, wxMaxima, наиболее дружелюбна к пользователю, поэтому рекомендуется при прочих равных использовать именно ее.

Maxima, как и почти любой математический пакет, работает в терминальном режиме, используя принцип «вопрос-ответ». Однако, часть наиболее употребительных операций вынесена в диалоговый режим. Для использования диалогов вместо прямого набора команд используются либо команды главного меню, либо панели, отобразить которые можно используя команду главного меню Maxima → Panes:



Доступны панели: General Math (основные операции символической алгебры: упрощение алгебраических и тригонометрических выражений, раскрытие скобок, вычисление пределов, интегрирование и дифференцирование, решение ОДУ,

построение графиков функций), Statistics (вычисление базовых статистических величин) и т. д.

**В диалоговый режим вынесено небольшое количество операций, при прочих равных следует пользоваться командами системы.**

Базовым элементом рабочей области GUI является ячейка. Определены следующие типы ячеек:

Тип ячейки	Команда меню	Сочетание клавиш
Заголовок	Cell → Insert Title Cell	Ctrl+2
Текст	Cell → Insert Text Cell	Ctrl+1
Ячейка ввода	Cell → Insert Input Cell	Создаются прямым вводом
Секция	Cell → Insert Section Cell	Ctrl+3
Подсекция	Cell → Insert Subsection Cell	Ctrl+4
Изображение	Cell → Insert Image	

В рабочем поле доступны два режима работы — вставки ячеек (курсор — длинная горизонтальная линия) и редактирования ячеек. Для редактирования ячеек просто установите курсор в нужном месте.

Используемый механизм ячеек разного типа позволяет создавать документы, в том числе многостраничные, содержащие как текст, так и вычисления и сохранять их, в том числе, форматах HTML, либо LaTeX. Документ Maxima — файл с расширением wxm.

**При работе с wxMaxima следует учитывать кодировку ОС: файлы, созданные в кодировке UTF8 не могут быть качественно отображены в ОС семейства Windows и наоборот.**

Основной, с точки зрения задач системы, является ячейка ввода. Каждая такая ячейка содержит блок ввода и блок вывода. Блок ввода и блок вывода. Блок ввода может содержать несколько операций, разделяемых символом «;», либо «\$». Символ «\$» подавляет вывод.

● **Вычисление ячейки производится по сочетанию клавиш Shift+Enter. Для того, чтобы изменения в ячейке ввода вступили в силу необходимо ее вычислить. Если изменения проводились в начале вычислений и необходимо пересчитать все ячейки — используйте соответствующую команду пункта главного меню «Cells».**

Так как Maxima — система компьютерной алгебры, то в дополнение к переменной добавляется новый объект, к которому может быть определена операция присвоения — функция.

Переменные определяются в момент первого присвоения (инициализации). Для функций и переменных определены два различных оператора присвоения: «:» - для переменных и «:=» для функций. Рассмотрим несколько примеров задания переменных.

**Пример 1.** Присвоение численных значений:

```
(%i1) a:5; b:9;c:7$d:8;
(%o1) 5
      (%o2) 9
      (%o4) 8
```

Определяются четыре переменных: a, b, c, d. Вывод для переменной c подавлен. В любой момент определенные в системе переменные могут быть просмотрены командой values.

```
(%i5) values;
(%o5) [a, b, c, d]
```

•

В системе определены следующие арифметические операции:

Символ	Операция	Символ	Операция
+	Сложение	^	Возведение в степень
-	Вычитание	!	Факториал
*	Умножение	/	Деление

Константы, определенные в системе должны вызываться с знаком процента.

Обозначение	Константа	Обозначение	Константа
%i	Мнимая единица	inf	+∞

Обозначение	Константа	Обозначение	Константа
%e	Число Эйлера e	minf	-∞
%pi	Число π		

**Пример 2.** Операции с комплексными числами

```
(%i12) b:9+5*i;c:2*e+3*i;
(%o12) 5 %i + 9
(%o13) 3 %i + 2 %e

(%i10) f:b+c;
(%o10) 8 %i + 2 %e + 9

(%i11) float(f);
(%o11) 8.0 %i + 14.43656365691809
```

Определены две переменные: b и c, результат суммирования двух переменных, которым присвоены переменной f. Так как используется трансцендентное число e система не осуществляет расчет до конца, оставляя его в выражении. Для того, чтобы система закончила вычисления и выдала ответ в виде числа используется функция float.●

● **Для удаления переменных недостаточно удалить присвоение. Необходимо выполнить функцию kill(), указав в скобках удаляемые переменные.**

Для записи функций потребуется знание обозначений:

Обозначение	Описание	Обозначение	Описание
abs()	Модуль	sqrt()	Корень квадратный
signum()	Знак	acos()	Арккосинус
cabs()	Модуль комплексного числа	asin()	Арсинус
carg()	Аргумент комплексного числа (рад)	atan()	Арктангенс
imagpart()	Мнимая часть комплексного числа	cos()	Косинус
realpart()	Действительная часть	sin()	Синус

Обозначение	Описание	Обозначение	Описание
	комплексного числа		
exp()	Экспонента	tan()	Тангенс
log()	Натуральный логарифм	random()	Случайное число

**Задание 1.** Откройте *wxMaxima*.

Вставьте заголовок «Лабораторная работа №1».

Создайте секцию «Работа с переменными». Создайте подсекцию «Действительные переменные».

Определите переменные  $x_1, x_2, x_3$ , присвойте им значения — действительные числа.

Создайте подсекцию «Комплексные переменные».

Определите переменные  $x_4, x_5, x_6$ , присвойте им значения — комплексные числа.

Создайте подсекцию «Вычисления».

Выполните следующие алгебраические операции, присваивая их значение переменным  $x_7-x_9$ :

$$x_7 = \frac{\ln(x_1 \cdot x_2) + \sin(x_1 \cdot x_3)}{\pi \cdot e - \operatorname{tg}(\ln(x_2 - x_1 \cdot x_3))}, \quad x_8 = \frac{x_7}{x_5^6 - \sqrt{x_1 \cdot x_2 - x_3}} + \frac{\sin(x_2)}{e^{x_1}}$$

$$, \quad x_9 = x_7 + x_8^2 - \frac{x_4}{x_6} \cdot x_5 .$$

Задайте целочисленную переменную  $x_{10}$ . Рассчитайте факториал.

Рассмотрим процесс работы с функциями.

**Пример 3.** Определение функции

```
(%i5) f(x):=(a*x^2+b*x+c)/(a*x^3-c);
```

```
(%o5) f(x):= \frac{ax^2+bx+c}{ax^3-c}
```

Можно вычислить значение функций при заданных значениях переменной и параметров:

Если параметры не заданы, происходит символический расчет:

```
(%i33) a:2$ b:6$ c:1$ f(5);
(%o36) \frac{27}{83}
```

Определим функцию, заданную кусочно:  $z(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2 \\ x^3 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$

```
(%i8) zet(x):= if (x<2) then x^2-2 else x^3-5;
(%o8) zet(x):=if x<2 then x^2-2 else x^3-5
(%i9) zet(4);
(%o9) 59
```

В случае, когда необходимо вычислить значение функции с некоторым набором параметров `ev(функция, список значений параметров)`. Эта же функция может быть использована для подстановок.

**Пример 4.** Вычислить значение функции при конкретном наборе параметров:

```
(%i5) f(x):=(a*x^2+b*x+c)/(a*x^3-c);
(%o5) f(x):= \frac{ax^2+bx+c}{ax^3-c}
(%i91) ev(f(x),x:3,a:2,b:3,c:5);
(%o91) \frac{32}{49}
```

**Задание 2.** Создайте подсекцию «Определение функций и работа с ними»

Определите функцию

$$P(t) = \frac{m}{w+m} \cdot \left(1 + \frac{w}{m} \cdot e^{-t \cdot (w+m)}\right)$$

Рассчитайте значения функции при следующих комбинациях параметров (если параметр в условии не задан, а ранее он использовался — не забывайте удалять его перед вычислением)



командой kill):

1.  $m=365, w=0.2, t=8$ ; 2.  $m=400, w=0.23, t=7$ ;
3.  $m=100, w=0.5, t=3$ ; 4.  $w=0.68, t=3$ ; 5.  $m=5, t=10$ .

Удалите переменные  $m$  и  $w$ .

Для решения алгебраических уравнений используется функция solve(). В качестве параметров в функцию подается уравнение в явном виде, переменная, содержащая это уравнение либо уравнение, составленное с использованием ранее определенных функций и переменная, относительно которой решается данное уравнение.

**Пример 5.** Решим ряд уравнений, используя задание различным способом.

```
(%i13) solve(5*(log(x))^2-0.1=0,x);  
rat: replaced -0.1 by -1/10 = -0.1
```

```
(%o13) [x=%e-1/5√2, x=%e1/5√2]
```

```
(%i14) float(%);
```

```
(%o14) [x = .8681234453945849, x = 1.151909910168909]
```

Уравнение задано явным способом. Для приближенного вычисления корней использована команда float. Знак процента в качестве аргумента означает использование предыдущего вывода системы (в нашем случае - %o13).

```
(%i15) P(t):=m/(w+m)*(1+w/m*exp(-t*(w+m)));
```

```
(%o15)  $P(t) := \frac{m}{w+m} \left( 1 + \frac{w}{m} \exp((-t)(w+m)) \right)$ 
```

```
(%i17) eq:solve(P(t)=0.9995,t);
```

```
rat: replaced -0.9995 by -1999/2000 = -0.9995
```

```
(%o17) [t =  $\frac{\log\left(-\frac{2000w}{m-1999w}\right)}{w+m}$ ]
```

```
(%i18) ev(eq,w:0.2);
```

```
(%o18) [t =  $\frac{\log\left(-\frac{400.0}{m-399.8}\right)}{m+0.2}$ ]
```

В примере использована функция Задания 2. С помощью команды solve находится значение независимой переменной  $t$ . При котором функция принимает значение 0.9995. Результат решения присваивается переменной eq. Команда ev(eq,w:0.2) позволяет вычислить корень при конкретном значении  $w$ , равном 0.2. ●

● Если уравнение содержит показательную функцию, логарифмы необходимо после команды solve устанавливать флаг solveradcan:true. Если не удалось решить уравнение даже в этом случае, используется команда find\_root.

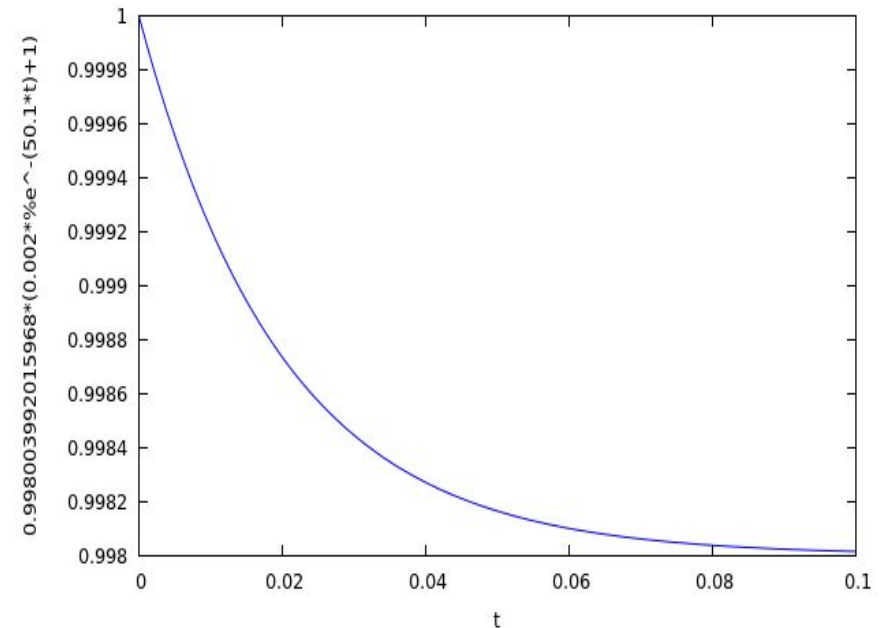
Построение двумерных графиков функций производится с помощью команды

**plot2d(функция, диапазон изменения независимой переменной).**

Функция может быть задана явно, может использоваться ранее определенная функция.

**Пример 6.** Построим график функции  $y=P(t)$  при  $m=50, w=0.1$ .

```
(%i51) w:0.1$ m:50$ plot2d(P(t),[t,0,0.1])$
```



Построим график функции

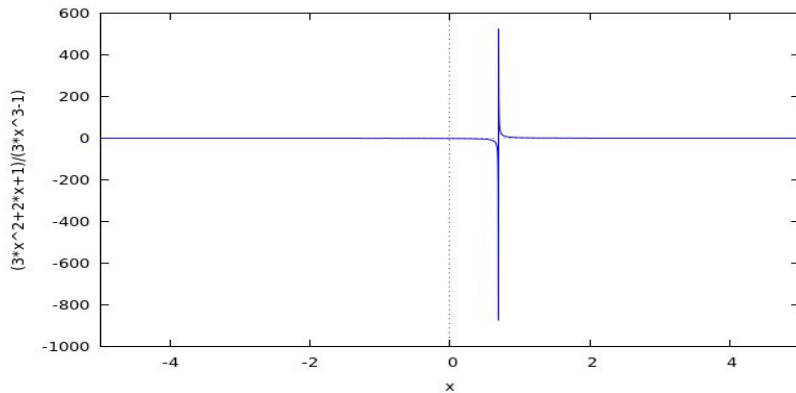
(%i54) f(x):=(a\*x^2+b\*x+c)/(a\*x^3-c);

(%o54)  $f(x) := \frac{ax^2 + bx + c}{ax^3 - c}$

при a=3,b=2,c=1

(%i55) a:3\$ b:2\$ c:1\$ plot2d(f(x),[x,-5,5])\$

Вид графика не очень информативен:



В таких случаях рекомендуется сузить диапазон по оси ординат:

(%i59) a:2\$ b:3\$ c:5\$ plot2d(f(x),[x,-5,5], [y,-40,40])\$  
plot2d: some values were clipped.

Система сообщает, что часть значений отрезана:

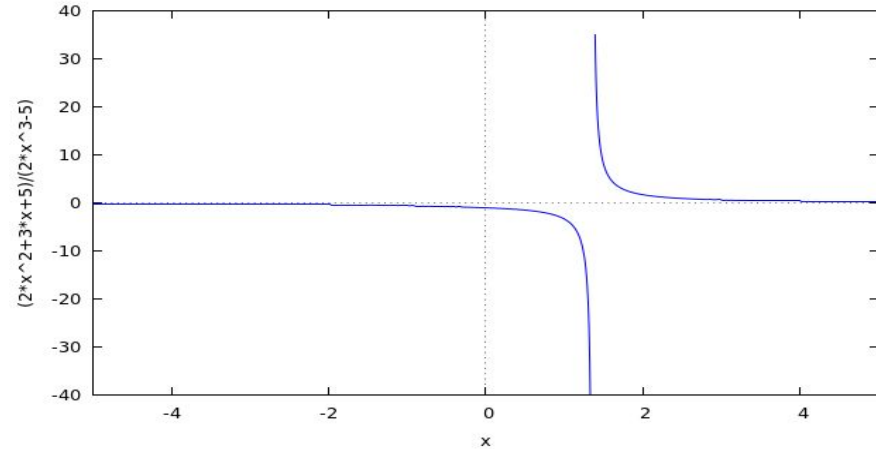


График стал более информативным, явно видна точка разрыва. ●

**Задание 3.** Создайте подсекцию «Построение графиков функций».

Построить графики функций:

$$f = \sqrt{2x^3 + 9x^2}; \quad f = (x + 1)\sqrt{x^2 - 1};$$

$$f = \frac{\sqrt{1 + |x + 2|}}{1 + |x|}; \quad f = \frac{\sin x + \cos x}{1 + |\cos x|}.$$

Определить точки пересечения данных функций с осью абсцисс.

В том случае, если корень с помощью команды solve получить не удалось, можно применить команду

**find\_root(функция, переменная, левая граница, правая граница)**

С помощью команды находится корень, локализованный на интервале [левая граница, правая граница].

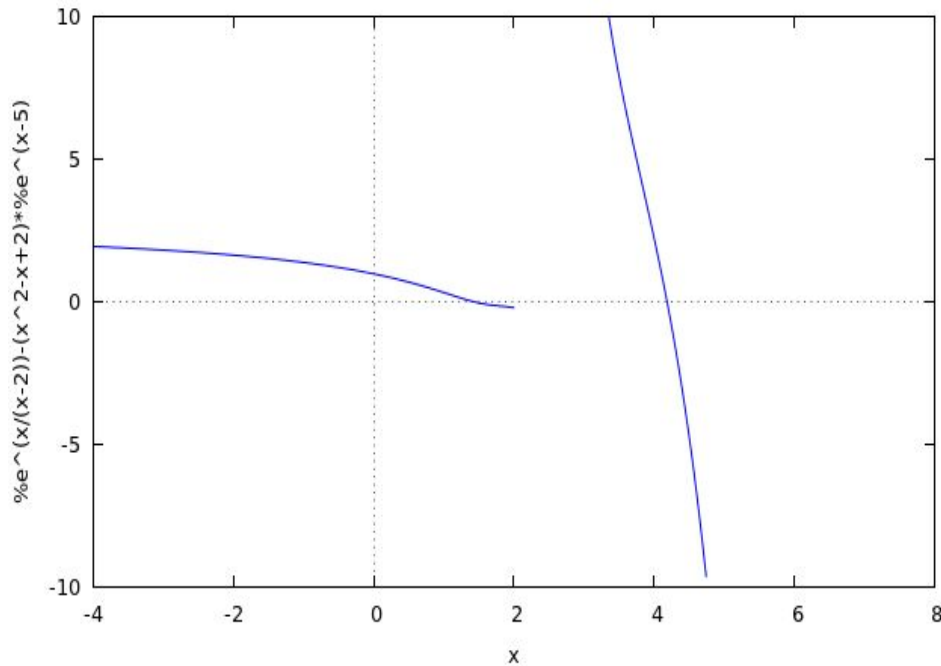
**Пример 7.** Найти корни функции  $y(x) = e^{\frac{x^2}{x-2}} - e^{x^3-5} \cdot (x^2 - x + 2)$ .

Применение команды solve, даже с включенным флагом solveradcan дает негативный результат:

```
(%i1) y(x):=exp(x/(x-2))-exp(x-5)*(x^2-x+2);
solve(y(x),x),solveradcan:true;
(%o1) y(x):=exp(x/(x-2))-exp(x-5)*(x^2-x+2)
(%o2) [x=-%e^-x*(sqrt(4*e^(x-2)+x-2/x-2-7*e^2*x-%e^x))
,%e^-x*(sqrt(4*e^(x-2)+x-2/x-2-7*e^2*x+%e^x))]
```

Система определила наличие двух корней, но не смогла выразить x. Используем численные методы для нахождения корней. Для этого построим график исследуемой функции с помощью команды

`plot2d(y(x),[x,-4,8],[y,-10,10]):`



Отделим корни: первый будем искать на интервале [0,1.9], второй — [4, 5]:

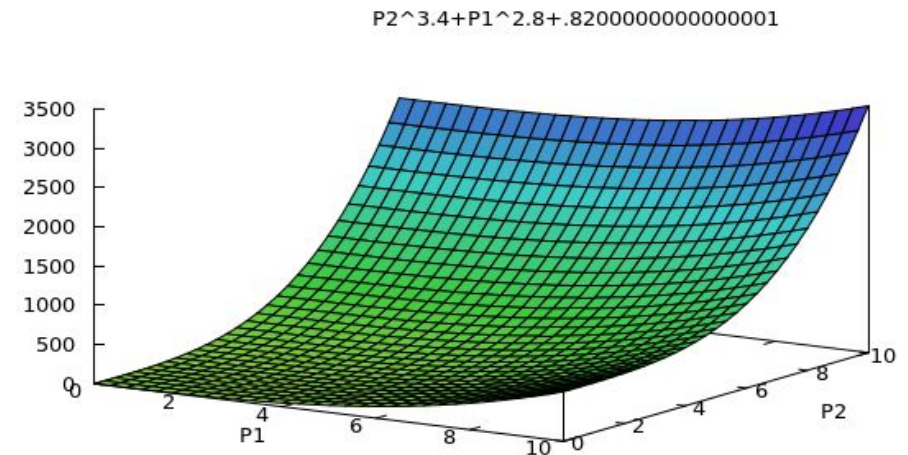
```
(%i11) find_root(y(x),x,0,1.9);
(%o11) 1.442490049926584
(%i9) find_root(y(x),x,4,5);
(%o9) 4.185300412350318
```

Таким образом, оба корня найдены в указанных интервалах. •

Построение поверхностей проводится с помощью функции `plot3d(функция, [первая переменная, диапазон], [вторая переменная, диапазон]):`

```
(%i61) plot3d(0.38+P1^2.8+0.44+P2^3.4,[P1,0,10],[P2,0,10]);
(%o61)
```

Результат:



**Задание 4.** Создайте подсецию «Самостоятельное задание».

## 2 Самостоятельно

Некоторые исследователи утверждают, что уровень жизни населения может быть приближенно определен с помощью одного параметра — среднедушевого

потребления электроэнергии (количество потребленной электроэнергии, кВтч, деленное на количество жителей,  $P$ ). Исследуются два параметра качества жизни: младенческая смертность (infant mortality,  $IM$ ) и ожидаемая продолжительность жизни при рождении (average life expectancy,  $LE$ ). Установлены следующие уравнения связи:

$$LE = 23.52 + 5.97 \cdot \ln(P)$$

$$IM = 256.05 - 29.41 \cdot \ln(P)$$

1. Построить графики функций.
2. Какой должно быть потребление электроэнергии в РФ, для того, чтобы исследуемые показатели были равны показателям трех ведущих стран (используйте данные ООН, Wikipedia)? Результаты вставьте в текстовый блок.

Сохраните файл и сдайте преподавателю.

### 3 Контрольные вопросы

1. Приведите классификацию системы автоматизации математических расчетов.
2. Какие задачи решаются с помощью пакетов компьютерной алгебры?
3. Что такое переменная? Как задается переменная в Maxima?
4. Какие типы ячеек определены в wxMaxima?
5. Опишите назначение команды float.
6. Опишите назначение команды kill. Приведите пример.
7. Какие константы определены в системе Maxima?
8. Как в системе Maxima записываются комплексные числа? Какие операции над комплексными числами определены?
9. Какие элементарные функции определены в Maxima?
10. Какие тригонометрические функции определены в Maxima?
11. Что такое факториал? Как факториал вычисляется в Maxima?
12. Как задаются функции в Maxima? Приведите пример.
13. Опишите назначение команды ev. Приведите пример.
14. Как построить график двумерной функции в Maxima?
15. Как решается алгебраическое уравнение в Maxima?

16. Как строится поверхность в Maxima?

17. Приведите пример расчета надежности системы по формуле, приведенной в теоретической части.

## Лабораторная работа № 4. Основы математического анализа с CAS Maxima.

Применяемая CAS: Maxima (wxMaxima)

**Цель работы:** получение навыков при работе с задачами математического анализа в Maxima.

**Отчет:** файл, сформированный в CAS Maxima

### 1 Дифференцирование и пределы

Производные функций определяются с помощью команды

**diff(функция, переменная дифференцирования)**

**Пример 8.** Вычислить производную от функции P(t) Задания 2.

```
(%i68) kill(m,w);
(%o68) done
(%i69) diff(P(t),t);
(%o69) 
$$\frac{(-w-m)w e^{-t(w+m)}}{w+m}$$

```

Первоначально командой kill удаляются переменные m и w. Далее, с помощью команды diff вычисляется производная. ●

Вычисление пределов организуется с помощью команды

**limit(функция, переменная, стремится к...).**

Для задания направления используются ключевые слова plus и minus:

```
(%i54) limit(sin(k*x)/x,x,0,minus);
(%o54) k
```

```
(%i55) limit(sin(k*x)/x,x,0,plus);
(%o55) k
```

```
(%i59) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o59) 0
```

```
(%i60) limit(sin(x)/x,x,minf);
(%o60) 0
```

В ячейке 54 вычисляется предел  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin(k \cdot x)}{x}$

В ячейке 55 вычисляется предел  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin(k \cdot x)}{x}$

В ячейке 59 вычисляется предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(k \cdot x)}{x}$

В ячейке 60 вычисляется предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(k \cdot x)}{x}$

**Пример 9.** Рассчитать предел функции  $f(x) = \frac{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5}{2 \cdot x^3 - 5}$  при тех значениях x, при которых знаменатель обращается в ноль. Скрипт, решающий задачу приведен ниже:

```

(%i226) f(x);
(%o226) 
$$\frac{2x^2+3x+5}{2x^3-5}$$


(%i227) znamenatel:a*x^3-c=0;
(%o227)  $2x^3-5=0$ 

(%i228) korni:solve(znamenatel,x);
(%o228)  $[x = \frac{\sqrt[3]{3}5^{1/3}\%i - 5^{1/3}}{2^{4/3}}, x = -\frac{\sqrt[3]{3}5^{1/3}\%i + 5^{1/3}}{2^{4/3}}, x = \frac{5^{1/3}}{2^{1/3}}]$ 

(%i229) float(korni[3]);
(%o229)  $x = 1.357208808297453$ 

(%i230) limit(f(x),x,korni[3],minus),limsubst:true;
(%o230)  $\frac{2x^2+3x+5}{2x^3-5} = -\infty$ 

(%i231) limit(f(x),x,korni[3],plus),limsubst:true;
(%o231)  $\frac{2x^2+3x+5}{2x^3-5} = \infty$ 

(%i232) plot2d(f(x),[x,0,3],[y,-7,7]);
plot2d: some values were clipped.
(%o232)

```

Функция задана ранее, в ячейке 226 показано, как она выглядит. Функция задана с применением переменных a,b,c, которым присвоены конкретные значения.

В ячейке 227 определяется переменная znamenatel, которой присваивается уравнение  $2 \cdot x^3 - 5 = 0$ .

В ячейке 228 переменной корни присваивается список, содержащий решения уравнения, определенные в ячейке 227. Только третий корень — действительное число и расчет предела при этом значении имеет для нас смысл.

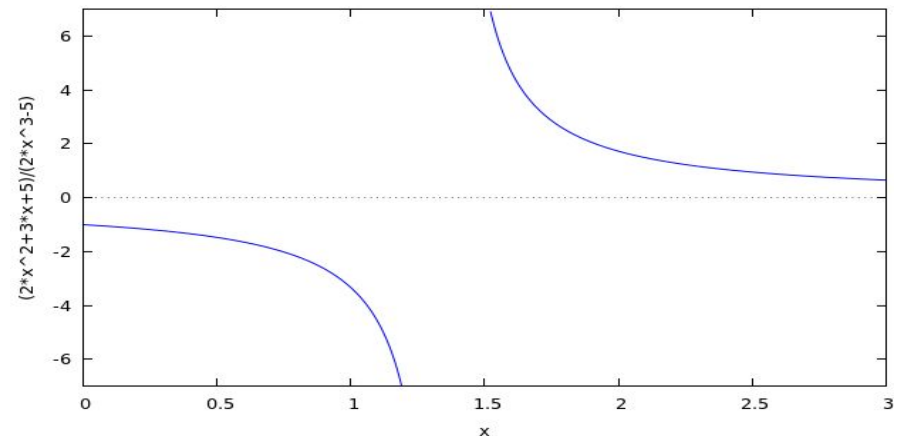
**Решения уравнения znamenatel в том виде, в котором они определены в ячейке 228 — символьные выражения и обращаться с ними как с числами невозможно!**

К элементам списка можно обращаться по номеру — так, как это делается в ячейке 229. Номер указывается после имени переменной в

квадратных скобках.

В ячейках 230 и 231 вычисляются пределы слева и справа от указанного значения. Обратите внимание на флаг *limsubst:true* — это означает, что в выражение могут подставляться другие выражения (в нашем случае — в функцию будут подставлены выражение для третьего корня из ячейки 228). В нашем случае это важно: корни — трансцендентные числа и не могут быть вычислены точно. При подстановке точного значения, как оно приводится в ячейке 229, будет получен, скорее всего, не вполне ожидаемый результат.

Проверяем полученный результат с помощью построения функции в ячейке 232:



Действительно, в указанной точке имеет место неустранимый разрыв, справа функция уходит на  $-\infty$ , слева на  $\infty$ .

Определим понятия минимума и максимума функции нескольких переменных.

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Точка  $x^{(0)} \in E$  называется **точкой строгого максимума (строгого минимума)**, если существует такая окрестность  $S(x^{(0)})$  точки  $x^{(0)}$ , что для всех  $x \in S(x^{(0)}) \cap E$ ,  $x \neq x^{(0)}$  выполняется неравенство  $f(x) < f(x^{(0)})$ , ( $f(x) > f(x^{(0)})$ ).

Если же для точки  $x^{(0)}$  существует такая окрестность  $S(x^{(0)})$ , что при всех  $x \in S(x^{(0)}) \cap E$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x^{(0)})$  ( $f(x) \geq f(x^{(0)})$ ), то  $x^{(0)}$  называется просто **точкой максимума (минимума)**. Точки (строгого)

максимума и минимума называются **точками (строгого) экстремума**.

Необходимым условием существования точек экстремума является равенство нулю частных производных в них, в случае функции нескольких переменных. Такие точки называются стационарными.

**Пример 1.** Найти стационарные точки функции

$$f(x, y) = x^2 - 5 \cdot y^2 + 3 \cdot x \cdot y^2 + 5 \cdot x - 2 \cdot y$$

Рассчитать значение функции в этой точке.

```
(%i1) f(x,y):=x^2-5*y^2+3*x*y^2+5*x-2*y;
(%o1) f(x,y):=x^2-5*y^2+3*x*y^2+5*x+(-2)y

(%i2) dx:diff(f(x,y),x);
      dy:diff(f(x,y),y);
(%o2) 3*y^2+2*x+5
(%o3) 6*x*y-10*y-2

(%i4) roots:solve([dx=0,dy=0],[x,y]);
(%o4) [[x=-2.509556203433755,y=-.07981694073844245],[x=
1.671444724887357-.1997138987656346%i,y=1.668099468256755%i+
.03990847120053045],[x=.1997138987656346%i+1.671444724887357,y=
.03990847120053045-1.668099468256755%i]]

(%i5) roots[1][1];roots[1][2];
(%o5) x=-2.509556203433755
(%o6) y=-.07981694073844245

(%i7) f(roots[1][1],roots[1][2]);
(%o7) 3*x*y^2-5*y^2-2*y+x^2+5*x=-6.170091738237491
```

Решением данной задачи будет скрипт:

В ячейке 1 определяется заданная функция.

В ячейке 2 переменным  $dx$  и  $dy$  присваиваются значения производной от заданной функции по  $x$  и  $y$  соответственно. Как показано в выводе этой ячейки

производная по  $x$ :  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3 \cdot y^2 + 2 \cdot x + 5$ ,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6 \cdot x \cdot y - 10 \cdot y - 2.$$

В ячейке 4 производится решение системы уравнений с помощью команды

`solve`. Обратите внимание на форму записи системы: уравнения записываются в квадратных скобках, через запятую. Переменные, относительно которых производится решение также выписываются через запятую. Решение присваивается переменной `roots`. Эта переменная — двумерный список. В этом списке элемента (три переменных), каждое решение содержит два элемента — значения переменных.

Пример обращения к элементам списка (корням системы уравнения) приводится в ячейке 5. В первой квадратной скобке указывается номер элемента (номер корня), во второй — номер вложенного элемента (номер переменной). Нас интересует только первый корень (он вещественный), поэтому просматриваем и используем значения `roots[1][1];roots[1][2]`.

В ячейке 7 рассчитывается значение функции в этой точке.

Итого: стационарная точка  $(-2.509, -0.0798)$ , значение функции в ней равно  $-6.17$ .

## 2. Задача поиска минимума и максимума функции в заданной области

Решение задачи поиска минимума и максимума на промежутке может быть проведено с помощью явных расчетов в том стиле, в котором мы проводили их в предыдущем разделе. Однако, в рамках нашего курса мы рассматриваем исключительно численную реализацию этой задачи.

Данная задача решается с помощью команды:

**`fmin_cobyla(функция,переменные, точка_старта, constraints=[ограничения], необязательные_аргументы)`.**

Из необязательных аргументов приведем один: `maxfun` — максимальное количество итераций.

**Данный параметр по умолчанию равен 1 000. Иногда требуется увеличить количество итераций, чтобы получить реальное решение.**

**Пример 2.** Рассмотрим вопрос о том, является ли точка, найденная в Примере 1 точкой максимума или минимума.

Для этого возьмем область  $\{(x,y) | |x| \leq 6, |y| \leq 6\}$ . Найденная в примере 1 точка принадлежит этой области.

```

(%i23) load(fmin_cobyla)$... (0 lines hidden)

(%i24) fmin_cobyla(x^2-5*y^2+3*x*y^2+5*x-2*y,[x,y],[5,5],
constraints=[x>=-6,x<=6,y>=-6,y<=6]);
(%o24) [[x=-6.0,y=6.0],-834.0,46,0]

(%i25) fmin_cobyla(-(x^2-5*y^2+3*x*y^2+5*x-2*y),[x,y],[5,5],
constraints=[x>=-6,x<=6,y>=-6,y<=6]);
(%o25) [[x=6.0,y=6.0],-522.0,18,0]

(%i26) plot3d(x^2-5*y^2+3*x*y^2+5*x-2*y,[x,-6,6],[y,-6,6]);
(%o26) false

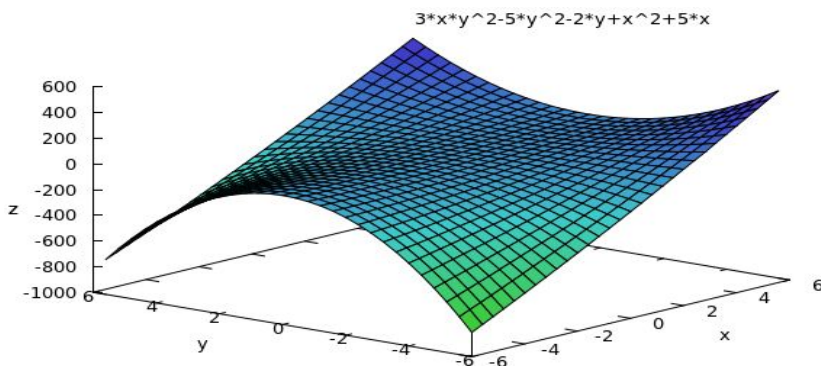
```

В ячейке 23 подключается библиотека `fmin_cobyla`. Делается это с помощью команды `load`.

В ячейке 24 вызывается команда `fmin_cobyla`, указана исследуемая функция, переменные. В качестве начальной точки указывается точка (5, 5). Решение дает следующую информацию: точка, в которой достигается минимум, находится на границе области: (-6, 6). Значение минимума функции равно -834, решение достигнуто за 46 шагов, ошибок нет (последнее числоответа системы — 0).

В ячейке 25 вызывается та же команда, но функцию берем с обратным знаком. Логика простая: максимум, взятый с обратным знаком — минимум. Таким образом, максимум достигается опять же на границе, в точке (6, 6), значение функции равно 522 (минус исчез из-за того, что мы использовали отрицательную исходную функцию).

В ячейке 26 строится функция на указанном промежутке.



Построенная поверхность соответствует ожиданиям. Экстремумов на указанном

промежутке функция не имеет, соответственно, минимумы и максимумы достигаются на границе.●

● Точка старта алгоритма имеет значение. Измените ее на (-5, -5) в приведенном примере и ответ системы удивит. Система «свалится» в локальный минимум, который будет больше, чем имеющийся в указанной области. Вывод: необходимо использовать визуализацию, а также более глубокий анализ функции, построенный на теоремах о достаточных условиях существования экстремума.

### 3. Задача поиска условного экстремума

Пусть задана функция нескольких переменных:

$$z=f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

и ограничения (связи):

$$g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq a_i$$

связи могут иметь вид равенств.

Определить экстремум (минимум, максимум) заданной функции, которую мы будем называть целевой, при заданных связях.

**Целевой функцией** называется функция, относительно которой ставится задача поиска экстремума.

Задача решается тем же способом, что и в предыдущем разделе и имеет огромное прикладное значение.

**Пример 3.** Район снабжают электрической энергией три электростанции. Каждая имеет один агрегат, вырабатывающий энергию. Для агрегатов каждой электростанции известны расходные характеристики, т.е. зависимости расхода топлива  $V$  от активной мощности  $P$ , вырабатываемой станцией. Необходимо обеспечить район заданной гарантированной мощностью  $P_0$ , минимизировав расход топлива.

Математическая модель задачи:

$$V_1(P_1)+V_2(P_2)+V_3(P_3) \rightarrow \min$$

$$P_1+P_2+P_3=P_0$$

$$P_1 \geq 0, P_2 \geq 0, P_3 \geq 0$$



Решим задачу при конкретном виде функции и значениях переменных.

№ агрегата	Расходная характеристика, В, ед. топлива
1	$0,38+P_1^{2,8}$
2	$0,44+P_2^{3,4}$
3	$0,27+P_3^{2,9}$

Необходимо обеспечить мощность в 30 000 единиц.

При таких начальных данных формулировка задачи становится следующей:

$$0,38+P_1^{2,8}+0,44+P_2^{3,4}+0,27+P_3^{2,9} \rightarrow \min$$

$$P_1+P_2+P_3=30\ 000$$

$$P_1 \geq 0, P_2 \geq 0, P_3 \geq 0$$

Скрипт для решения задачи в Maxima:

```
(%i88) fmin_cobyla(0.38+P1^2.8+0.44+P2^3.4+0.27+P3^2.9,
[P1, P2, P3], [10000,10000,10000],
constraints = [P1+P2+P3=30000,P1>=0,P2>=0,P3>=0],
maxfun=100000);
(%o88) [[P1=18009.81368974158, P2=1433.831856723524, P3=
10556.3544535349], 1.342802333002997 10^12, 30037, 0]
```

Таким образом, для минимизации потребления топлива необходимо распределять мощности так: (18 009,1 433, 10 566). Потребление топлива при этом равно примерно триллиону единиц. ●

**Необходимость увеличения количества итераций до 100 000 (параметр maxfun) возникла, в первую очередь, из-за несбалансированности единиц измерения. Есть числа, не превосходящие единицы, есть выражаемые тысячами. В таком случае необходимо нормировать величины, добиваясь примерно одной и той же размерности.**

## 2 Контрольные вопросы

1. Как определяется производная в Maxima?
2. Как рассчитать предел в Maxima?

3. Как обращаться к элементам решения системы уравнений покомпонентно?
4. Какова процедура получения стационарных точек функции в Maxima?
5. Как осуществить поиск минимума функции в заданной области?
6. Как осуществить поиск максимума функции в заданной области?
7. Что такое «целевая функция»?
8. Как формулируется задача поиска условного экстремума?
9. Приведите математическую модель задачи о загрузке мощностей электростанций с минимизацией потребления топлива.
10. Какие команды можно использовать в Maxima для решения задач на условный экстремум?

## 3 Задачи для решения

Задачи для решения выбираются из соответствующих разделов по номеру в журнале группы. Формируется единый файл Maxima, выполняются все задачи, результирующий файл распечатывается и сдается как часть лабораторной работы.

1. Найти пределы (по одному заданию из задач 13-16): [http://pluspi.org/wiki/index.php/Zadachnik\\_Kuznecova\\_Predely\\_Zadachi\\_13-16](http://pluspi.org/wiki/index.php/Zadachnik_Kuznecova_Predely_Zadachi_13-16)
2. Вычислить по одной производной из задач 7-14: [http://pluspi.org/wiki/index.php/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA\\_%D0%9A%D1%83%D0%B7%D0%BD%D0%B5%D1%86%D0%BE%D0%B2%D0%B0\\_%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5](http://pluspi.org/wiki/index.php/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%9A%D1%83%D0%B7%D0%BD%D0%B5%D1%86%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5)
3. Выполнить по одному заданию из задач в соответствии с постановкой: <http://pluspi.org/wiki/index.php/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:>

<http://www.wolframalpha.com>

## Лабораторная работа № 5. Работа в Wolfram Alfa

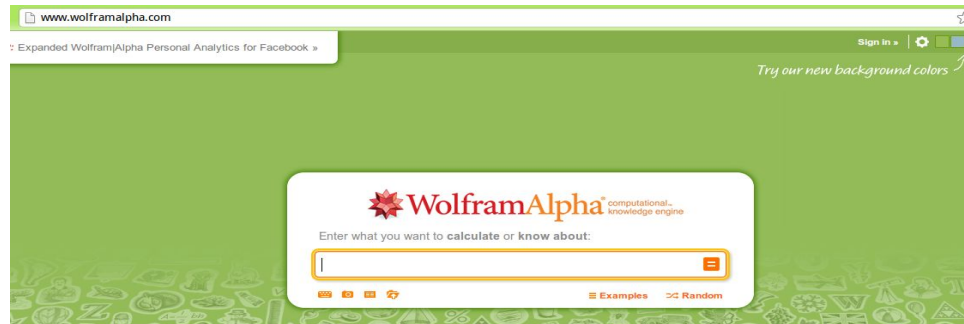
**Применяемая среда:** WolframAlfa (<http://www.wolframalpha.com>)

**Цель работы:** получение навыков использования WolframAlfa в математических расчетах

**Отчет:** файл Writer, содержащий запросы и ответы системы.

### 1 Основные сведения о WolframAlpha

WolframAlfa — это online сервис для проведения вычислений, а также поисковая система для получения разнообразной научной и технической информации. Работа в системе достаточно легка и не предполагает наличия специфичных знаний. Выражения для расчетов могут задаваться как с помощью синтаксиса CAS Mathematica, так и с помощью языка, близкого к естественному.



В свободном доступе представлена лишь часть функционала, для получения полного доступа необходимо оформлять подписку.

### 2 Решение уравнений, систем уравнений

Для решения уравнения достаточно ввести его с командой solve:

**Пример 1.** Решить уравнение  $x^5 - 4x^2 + 6x - 24 = 0$

Решение осуществляется с помощью команды:

solve x^5 - 4x^2 + 6x - 24 = 0

Обращаем внимание на то, что WolframAlpha вполне адекватно выражения без знака умножения между коэффициентом и переменной

Вывод системы очень информативен. Каждый блок оформлен в виде отдельного фрейма.

Сначала система информирует об интерпретации выражения, что полезно, если вы не уверены в правильности ввода:

Input interpretation:

solve  $x^5 - 4x^2 + 6x - 24 = 0$

Далее представлено решение задачи и дополнительный вывод, его иллюстрирующий:

Results:

More digits

$x \approx 1.93894$

$x \approx -1.53808 - 1.46712 i$

$x \approx -1.53808 + 1.46712 i$

$x \approx 0.56861 - 1.55444 i$

$x \approx 0.56861 + 1.55444 i$

Уравнение имеет один вещественный и четыре комплексных корня. Если желательна большая точность результатов — щелкните на кнопку **More digits** в правом верхнем углу фрейма:

Results:

[Fewer digits](#) [More digits](#)

$$x \approx 1.9389369800489486234028930$$

$$x \approx -1.5380777613653825157907920 - 1.4671195141084462739007617 i$$

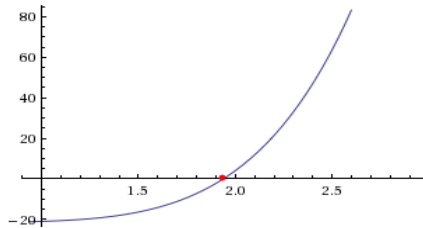
$$x \approx -1.5380777613653825157907920 + 1.4671195141084462739007617 i$$

$$x \approx 0.5686092713409082040893455 - 1.5544447050585138608559663 i$$

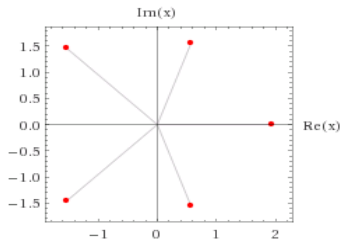
$$x \approx 0.5686092713409082040893455 + 1.5544447050585138608559663 i$$

Дополнительный вывод — графическая иллюстрация к найденным решениям (точка пересечения оси абсцисс и графика функции, корни в комплексной плоскости), а также сумма и произведение корней:

Root plot:



Roots in the complex plane:



Product of roots:

24

Sum of roots:

0

Каждый фрейм снабжен собственным меню, позволяющем загрузить содержимое фрейма, добавить интерактивность к графическому выводу и многое другое. К сожалению, для этого необходимо оформить подписку.

•

Решение систем уравнений проводится таким же способом.

Пример 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - 4.5 \cdot x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение производится аналогично:

solve 5x1-2x2+3x3 = 2, 2x1-x2-x3 = -1, x2-4.5x3 = 5



Уравнения разделяются запятой, знаки умножения между коэффициентами и переменными могут не использоваться.

Вывод системы:

Input interpretation:

$$5 x_1 - 2 x_2 + 3 x_3 = 2$$

solve  $2 x_1 - x_2 - x_3 = -1$

$$x_2 - 4.5 x_3 = 5$$

Result:

[More digits](#)

[Step-by-step solution](#)

$$x_1 = \frac{84}{31} \approx 2.7097 \text{ and } x_2 = \frac{191}{31} \approx 6.1613 \text{ and } x_3 = \frac{8}{31} \approx 0.25806$$

Нажатие на кнопку [Step-by-step solution](#) дает пошаговый алгоритм решения.

Получение пошагового решения доступно для зарегистрированного пользователя, в бесплатном аккаунте только для трех примеров.

•

**Пример 3.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2 \cdot \sin(x_1) - \sin(x_2) = -0.5 \\ \sin(x_2) - 2 \cdot \cos(x_1) = -1 \end{cases}$$

solve 2sin(x1)-cos(x2) = -0.5, sin(x2)-2cos(x1) = -1

Вывод системы:

Input interpretation:

solve 
$$\begin{cases} 2 \sin(x_1) - \cos(x_2) = -0.5 \\ \sin(x_2) - 2 \cos(x_1) = -1 \end{cases}$$

Results:

$x_1 = 2 \left( \pi c_2 + \tan^{-1} \left( \frac{1}{33} (-8 - \sqrt{31}) \right) \right)$  and  
 $x_2 = 2 \left( \pi c_1 + \tan^{-1} \left( \frac{1}{3} (8 + \sqrt{31}) \right) \right)$  and  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 2 \left( \pi c_2 + \tan^{-1} \left( \frac{1}{33} (\sqrt{31} - 8) \right) \right)$  and  
 $x_2 = 2 \left( \pi c_1 + \tan^{-1} \left( \frac{1}{3} (8 - \sqrt{31}) \right) \right)$  and  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$

$\tan^{-1}(x)$  is the inverse tangent function »  
 $\mathbb{Z}$  is the set of integers »

Как видим, система отлично справляется с тригонометрическими уравнениями.

### 3 Построение графиков функций

Построение графиков функций производится с помощью ключевого слова **plot**. После функции (либо функций, разделенных запятой) приводится диапазон изменения независимой переменной (переменных). Диапазон изменения указывается после знака равно через двоеточие. Впрочем, возможно задавать диапазон изменения и с помощью слов from и to, диапазон можно и не указывать.

**Пример 4.** Построить графики функций 
$$\begin{cases} y = x^2 \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \cos(x) \\ y = x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x) \end{cases}$$

Решение без указания диапазона изменения  $x$  производится с помощью команды:

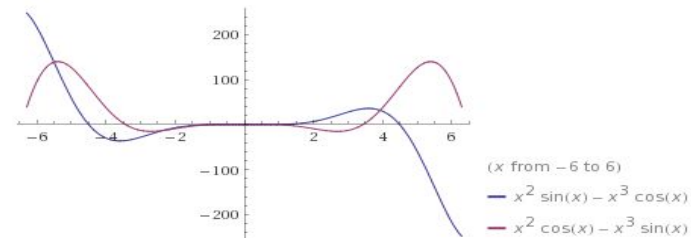
plot y=x^2\*sin(x)-x^3\*cos(x), y=x^2\*cos(x)-x^3\*sin(x)

Вывод системы:

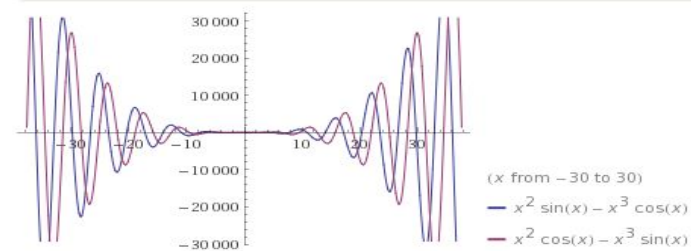
Input interpretation:

plot 
$$\begin{cases} y = x^2 \sin(x) - x^3 \cos(x) \\ y = x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x) \end{cases}$$

Plots:



Enable interactivity



Enable interactivity

Изменить диапазон в интерактивном режиме невозможно в бесплатной версии, поэтому, для получения информации о поведении функции вблизи нуля построим график функций от -2 до 2.

plot  $y=x^2\sin(x)-x^3\cos(x)$ ,  $y=x^2\cos(x)-x^3\sin(x)$ ,  $x=-2..2$



Вывод системы:

Input interpretation:

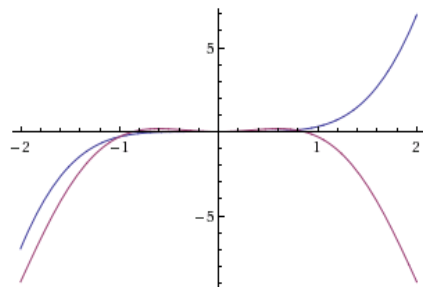
plot

$$x^2 \sin(x) - x^3 \cos(x)$$

$$x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)$$

$x = -2$  to  $2$

Plot:



—  $x^2 \sin(x) - x^3 \cos(x)$   
—  $x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)$

Enable interactivity

**Пример 5.** Построить поверхность  $z = x^4 y - x^2 y^3 + xy - 2$

Команда для построения:

plot  $x^4 y - x^2 y^3 + xy - 2$



Поверхность:

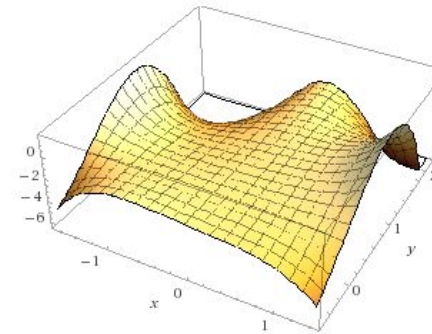
Input interpretation:

plot

$$x^4 y - x^2 y^3 + xy - 2$$

3D plot:

Show contour lines



Enable interactivity

Ограничения диапазонов независимых переменных производится аналогичным для двумерных графиков способом. ●

Графики функций в полярных координатах можно получить используя ключевые слова **polar plot**.

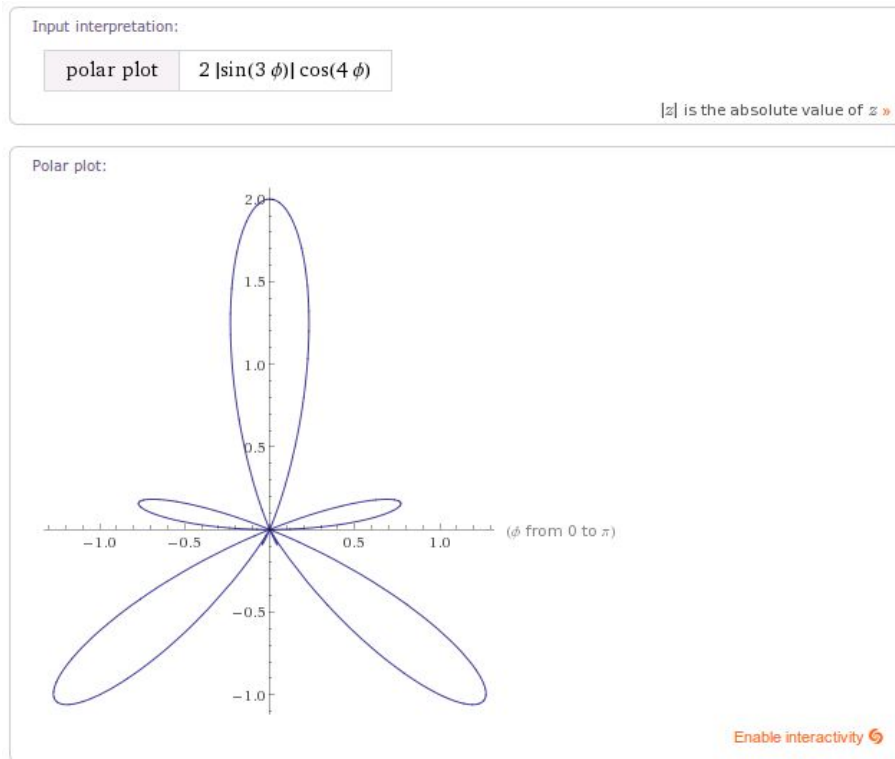
**Пример 6.** Построить график в полярных координатах для функции  $\rho = 2 \cdot |\sin(3 \cdot \phi)| \cdot \cos(4 \cdot \phi)$

Команда для построения:

polar plot  $2 \cdot |\sin(3 \cdot \phi)| \cdot \cos(4 \cdot \phi)$



Вывод системы:



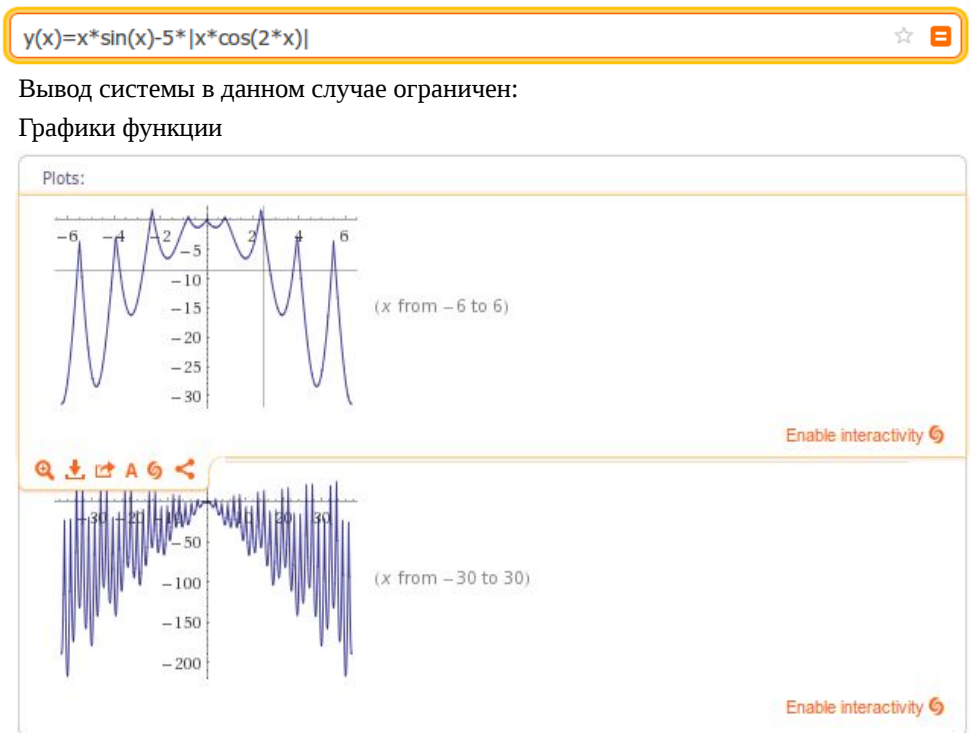
#### 4 Исследование функций

Самый тривиальный способ исследовать функцию — просто набрать ее. В выводе может быть показан достаточно полный анализ функции.

● **Может быть...** И опять ограничения бесплатной версии — если расчеты занимают время, большее чем выделено системой для такого аккаунта — вычисления прервутся.

**Пример 7.** Исследовать функцию:  $y = x \cdot \sin(x) - 5 \cdot |x \cdot \cos(2 \cdot x)|$ ,

В поле ввода просто набираем функцию. Не забываем в скобках указать независимую переменную.



Альтернативные формы записи:

Alternate forms:

$$y(x) = x \sin(x) - 5 |x| |\cos(2x)|$$

$$5 |x \cos(2x)| + y(x) = x \sin(x)$$

$$y(x) = -\frac{5}{2} [(e^{-2ix} + e^{2ix})x] + \frac{1}{2} i e^{-ix} x - \frac{1}{2} i e^{ix} x$$

Область определения и четность:

Properties as a real function:

Domain:

$\mathbb{R}$  (all real numbers)

Parity:

even

В данном случае — функция четная, область определения — все действительные числа.

•

В случае, когда времени достаточно — будут выведены производные, минимумы и максимумы.

Для получения производной достаточно воспользоваться записью, известной из курса высшей математики:  $d/dx$ , естественно вместо  $x$  указывается переменная, по которой идет дифференцирование.

**Пример 8.** Найти производную функции  $y(x) = \cos(2 \cdot \sin(x) - 3) - 0.5$

Команда для системы:

`d/dx cos(2*sin(x)-3)-0.5`

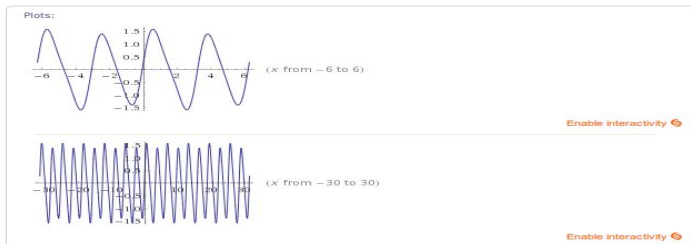
Вывод системы:

Производная:

Derivative:

$$\frac{d}{dx} (\cos(2 \sin(x) - 3) - 0.5) = 2 \sin(3 - 2 \sin(x)) \cos(x)$$

График производной:



Корни производной:

Roots:

Approximate forms

Step-by-step solution

$$x = \pi n_1 - \frac{\pi}{2}, \quad n_1 \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n_2 - \sin^{-1}\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi n_1}{2}\right) + \pi, \quad n_1 \in \mathbb{Z}, \quad n_2 \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n_2 + \sin^{-1}\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi n_1}{2}\right), \quad n_1 \in \mathbb{Z}, \quad n_2 \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$  is the set of integers »  
 $\sin^{-1}(x)$  is the inverse sine function »

Область определения, область значений и периодичность:

Properties as a real function:

Exact forms

Domain:

$\mathbb{R}$  (all real numbers)

Range:

$\{y \in \mathbb{R} : -1.58186 \leq y \leq 1.58186\}$

Periodicity:

periodic in  $x$  with period 6.28319

Ряд Тейлора в нуле:

Series expansion at  $x=0$ :

$$2 \sin(3) - 4x \cos(3) - 5x^2 \sin(3) + \frac{16}{3}x^3 \cos(3) + \frac{19}{4}x^4 \sin(3) + O(x^5)$$

•

Аналогичным образом вычисляются производные высших порядков: вторая —  $d^2/dx^2$ , третья —  $d^3/dx^3$ .

Для получения минимумов и максимумов используются ключевые слова **minimum** и **maximum**.

**Пример 9.** Найти минимумы и максимумы функции

$$y(x) = \cos(2 \cdot \sin(x) - 3) - 0.5$$

Ищем минимум:

minimum cos(2\*sin(x)-3)-0.5

Вывод системы:

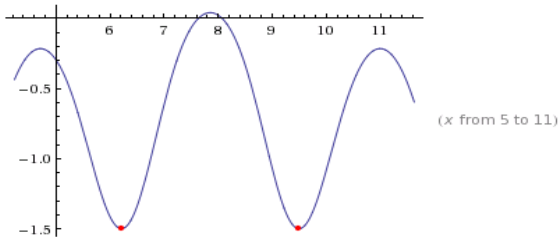
Global minima:

$$\min\{\cos(2 \sin(x) - 3) - 0.5\} = -\frac{3}{2} \text{ at } x = \pi + 2n\pi - \sin^{-1}\left(\frac{3-\pi}{2}\right) \text{ for integer } n$$

$$\min\{\cos(2 \sin(x) - 3) - 0.5\} = -\frac{3}{2} \text{ at } x = 2n\pi + \sin^{-1}\left(\frac{3-\pi}{2}\right) \text{ for integer } n$$

$\sin^{-1}(x)$  is the inverse sine function

Plot:



Максимум:

maximum cos(2\*sin(x)-3)-0.5

Examples Random

Input interpretation:

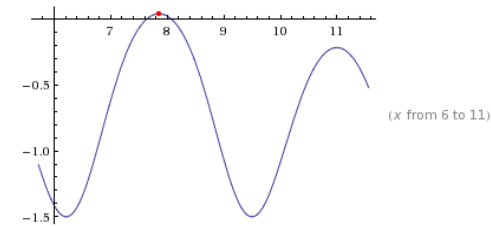
maximize cos(2 sin(x) - 3) - 0.5

Global maxima:

Approximate form

$$\max\{\cos(2 \sin(x) - 3) - 0.5\} = \cos(1) - \frac{1}{2} \text{ at } x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ for integer } n$$

Plot:



- Интегрирование функции осуществляется по ключевому слову **integrate**. В случае определенного интеграла указываются пределы с ключевыми словами **from**, **to**, либо с помощью конструкции  $x=a..b$ .

Пример 10. Вычислить интегралы:

$$\int_5 x^2 \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \cos(x) dx,$$

$$\int_2 x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x) dx$$

Для первого интеграла:

integrate (x^2\*sin(x) - x^3\*cos(x))dx

Вывод системы:

Интеграл и его графики:

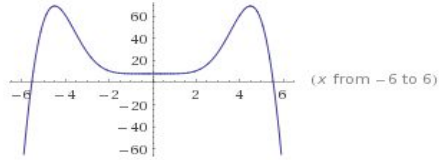


Indefinite integral:

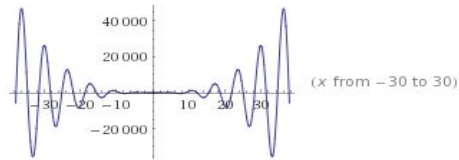
[Step-by-step solution](#)

$$\int (x^2 \sin(x) - x^3 \cos(x)) dx = -x(x^2 - 8) \sin(x) - 4(x^2 - 2) \cos(x) + \text{constant}$$

Plots of the integral:



[Enable interactivity](#)



[Enable interactivity](#)

Alternate forms of the integral:

$$x^3 (-\sin(x)) - 4x^2 \cos(x) + 8x \sin(x) + 8 \cos(x) + \text{constant}$$

$$(8x - x^3) \sin(x) + (8 - 4x^2) \cos(x) + \text{constant}$$

$$-\frac{1}{2} i (e^{-ix} - e^{ix}) x(x^2 - 8) - 2(e^{-ix} + e^{ix})(x^2 - 2) + \text{constant}$$

Альтернативные формы записи:

Ряд Тейлора в нуле:

Series expansion of the integral at x=0:

$$8 + \frac{x^6}{18} - \frac{x^8}{240} + O(x^9)$$

Для второго интеграла:

$$\text{integrate}(x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)) dx, x=2..5$$

Вывод системы:

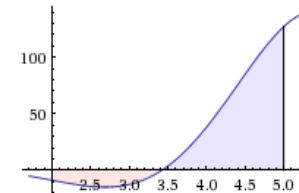
Значение интеграла и графическое представление:

Definite integral:

[More digits](#)

$$\int_2^5 (x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)) dx = 4 \sin(2) - 46 \sin(5) + 105 \cos(5) \approx 77.5322$$

Visual representation of the integral:



Неопределенный интеграл:

Indefinite integral:

[Step-by-step solution](#)

$$\int (x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)) dx = -2(x^2 - 2) \sin(x) + x(x^2 - 6) \cos(x) + 2x \cos(x) + \text{constant}$$

•  
Разложение в ряд Тейлора осуществляется с помощью ключевого слова **taylor**.

**Пример 11.** Разложить в ряд Тейлора функцию  $y(x) = x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x)$  при  $x=2$ .

Команда:

$$\text{taylor}(x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)), x=2$$

Вывод системы:

Ряд Тейлора:

Series expansion at x=2:

[More terms](#)

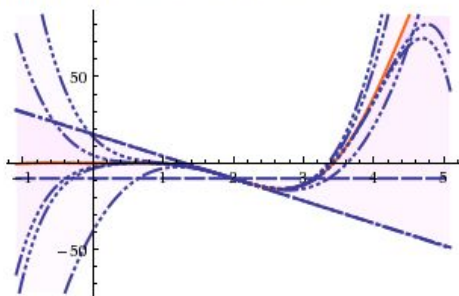
$$4(\cos(2) - 2\sin(2)) - 4(x-2)(4\sin(2) + \cos(2)) + (x-2)^2(-6\sin(2) - 13\cos(2)) + \frac{2}{3}(x-2)^3(7\sin(2) - 10\cos(2)) + \frac{2}{3}(x-2)^4(5\sin(2) + \cos(2)) + \frac{1}{30}(x-2)^5(4\sin(2) + 33\cos(2)) + O((x-2)^6)$$

Аппроксимация при различном количестве членов ряда:

Approximations about x=2 up to order 7:

[Fewer terms](#)

[More terms](#)



(order  $n$  approximation shown with  $n$  dots)

[Enable interactivity](#)

## 5 Матричные операции

Матрицы для работы в системе необходимо вводить в фигурных скобках, разделяя элементы строки запятыми, а строки — фигурными же скобками.

Например, матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  записывается как  $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ .

Для нас интересны арифметические операции: +, -, · (умножение — точка!), /, ^, и операции det — определитель, inv — обратная матрица, eigenvalues — собственные числа, eigenvectors — собственные вектора.

**Пример 12.** Рассчитать определитель, квадрат матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , матрицу, обратную к ней, ее собственные числа.

Определитель матрицы:

WolframAlpha computational knowledge engine

det  $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$

Examples Random

Input interpretation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

|m| is the determinant »

Result:

-2

Квадрат матрицы:

WolframAlpha computational knowledge engine

$\{\{1,2\},\{3,4\}\}^2$

Examples Random

Input:

$$\text{MatrixPower}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, 2\right]$$

Result:

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица:



computational... knowledge engine

inv {{1,2},{3,4}}


Input:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \text{ (matrix inverse)}$$

Result:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:



computational... knowledge engine

eigenvalues {{1,2},{3,4}}

Input:

$$\text{Eigenvalues}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

Results:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{33})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{33})$$

Corresponding eigenvectors:

$$v_1 = \left(\frac{1}{6}(-3 + \sqrt{33}), 1\right)$$

$$v_2 = \left(\frac{1}{6}(-3 - \sqrt{33}), 1\right)$$

Как можно заметить, к собственным значениям вычисляются и собственные вектора.●

## 6 Задачи для решения

Задачи для решения выбираются из соответствующих разделов по номеру в журнале группы. Формируется единый файл, содержащий скриншоты и описания, выполняются все задачи, результирующий файл распечатывается и сдается как часть лабораторной работы.

1. Найти пределы (по одному заданию из задач 13-16): [http://pluspi.org/wiki/index.php/Zadachnik\\_Kuznecova\\_Predely\\_Zadachi\\_13-16](http://pluspi.org/wiki/index.php/Zadachnik_Kuznecova_Predely_Zadachi_13-16)
2. Вычислить по одной производной из задач 7-14: <http://pluspi.org/wiki/index.php/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%9A%D1%83%D0%B7%D0%BD%D0%B5%D1%86%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5>
3. Выполнить по одному заданию из задач в соответствии с постановкой: <http://pluspi.org/wiki/index.php/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%9A%D1%83%D0%B7%D0%BD%D0%B5%D1%86%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B8>

## Лабораторная работа № 6. Задачи оптимизации в случае нескольких игроков

Цель: Рассмотреть процесс построения игры в расширенной форме.

## 1 Работа в Gambit

В книге «Надежность электроэнергетических установок и систем», авторы Васильев А.П., Гук Ю.Б. Приводится достаточно большой набор методов исследования надежности. Среди всего прочего, на странице 151 авторы рассматривают такую задачу:

● Рассмотрим ситуацию выбора решения о строительстве линии электропередач для снабжения потребителя. Возможные действия человека:

- Строительство одноцепной линии
- Строительство двухцепной линии на двухцепных опорах
- Строительство двух одноцепных линий от независимых источников по независимым трассам

При этом, возможны следующие варианты состояний линий:

- Линия в работает без повреждений
- Будет обрыв проводов
- Будет наезд и разрушение линии

Есть два действующих объекта: «Природа», которая, будем считать, стремится к хаосу, уничтожить то, что человек сделал. И есть человек, который противостоит этому хаосу. Есть два антагониста, то есть два объекта, цели которых противоположны.

Для решения такого рода задач, то есть определения оптимального поведения человека служит теория игр — математическая теория, объектом изучения которой являются конфликтные ситуации. Конфликтная ситуация называется игрой, а стороны, участвующие в конфликте — игроками. Приведенная выше ситуация, когда второй игрок - «шанс», «природа» называется играми с природой. В том случае, когда мы предполагаем, что интересы игроков противоположны — игры называем антагонистическими (войны, в некотором смысле — предприниматель и контролеры, плательщик коммунальных платежей и управляющая организация). То, как действуют игроки называют стратегиями (игрок «Поставщик» в данной игре имеет три стратегии, так же как и «Природа»).

Итак, мы хотим знать, как оптимально построить линию. Что в данном случае «оптимально»? То, что позволяет минимизировать затраты. Будем привязываться к затратам на строительство и поддержание (видимо

учитываются и они, авторы говорят только о строительстве) одноцепной линии и «разложим» затраты в соответствии с предполагаемыми стратегиями «Природы»:

Природа\Поставщик ЭЭ	Одноцепная линия	Двухцепная линия на двухцепных опорах	Две одноцепных линии от независимых источников по независимым трассам
Линия в течении года работает без повреждений	1	2	3
Будет обрыв проводов	5	2	3
Будет наезд и разрушение линии	7	6	3

То есть, в случае, когда «Природа» готовит нам на линии обрывы проводов, затраты возрастают в пять раз, в случае одноцепной линии. Остальные оценки — по аналогии. Приведенная таблица в теории игр называется «матрицей платежей».

Игра, в том виде, в котором мы ее построили — называется игрой в нормальной форме (заданы стратегии и матрица платежей). Еще есть представление игры в расширенной форме, когда строится дерево игры — графически отображаются последовательности действий игроков и то, какие выигрыши они получают.

Допустим, известны вероятности каждого из «состояний» игрока «Природа» (оценку по статистике всегда можно прикинуть): **вероятность безаварийной работы равна 0.2, вероятность обрывов проводов равна 0.7, вероятность наездов и разрушений равна 0.1.**

Теперь основной вопрос: какая стратегия строительства в данном случае оптимальна? Какую линию вести? Попробуем решить задачу с помощью программы Gambit (сайт: <http://www.gambit-project.org>).

Разберем процесс на базе установки в Ubuntu.

Если не установлены пакеты wxWidgets, выполняем команду в терминале:

```
sudo apt-get install wx2.8-headers libwxgtk2.8-0 libwxgtk2.8-dev libwxgtk2.6-dev
```

Загружаем архив [Gambit](#) и распаковываем в какую-либо папку. Переходим в нее:

```
cd путь/папка
```

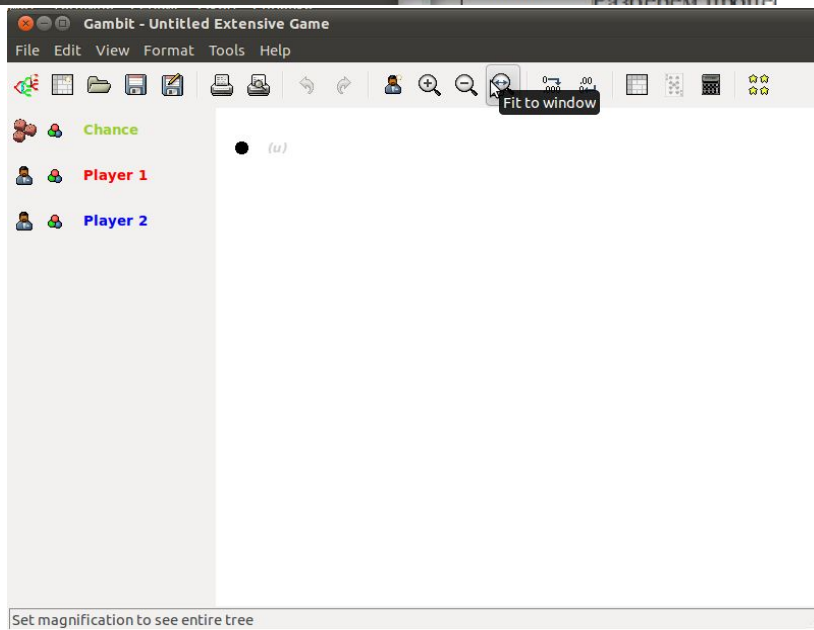
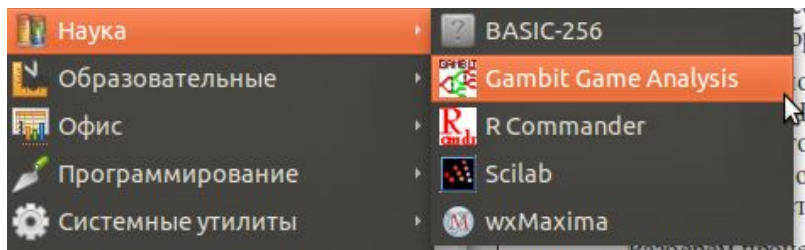
Последовательно выполняем:

```
./configure
```

```
make
```

```
sudo make install
```

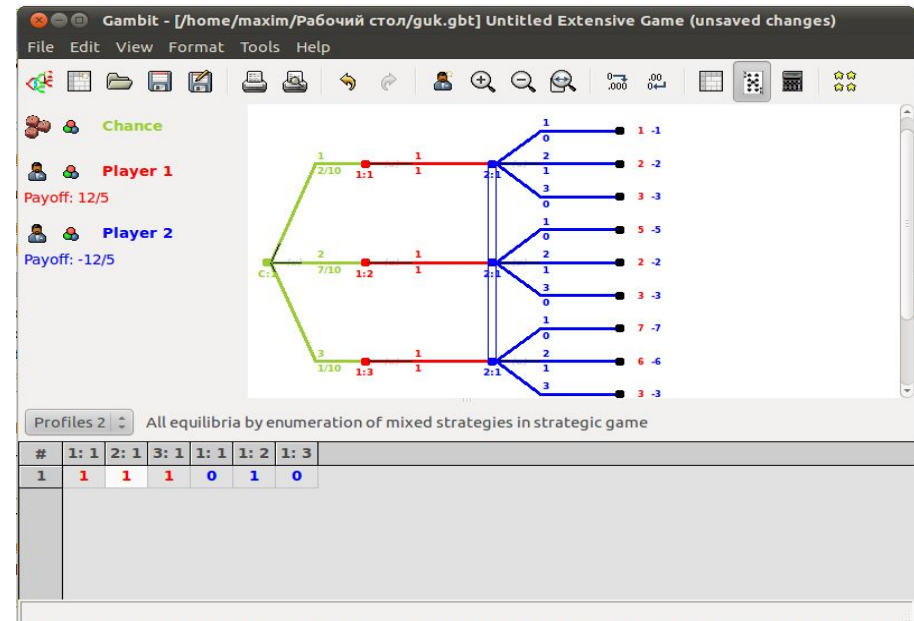
В разделе «Наука» появится новая ссылка:



Запускаем:

По умолчанию, программа создает три игрока, процедуру построения рассмотрите в скринкасте <http://www.youtube.com/watch?v=B4QuxUywwEQ>.

Результат — игра в расширенной форме:



Таким образом, поставщик электроэнергии должен озаботиться строительством двуцепной линии при заданном распределении вероятностей повреждений линии.

## 2 Задачи для решения

1. Исследуйте модель при различных вариантах распределения вероятностей. Составьте рекомендации
2. Изучите слайдкаст «Сколько стоит честность» (<http://www.slideshare.net/Cartmendum/pmi-seminar-trust-price-slides-hare>). Попробуйте найти решение с использованием Gambit.

## Лабораторная работа № 7. Язык статистического программирования R: основы

### 1. Почему R?

Язык программирования R разрабатывался с целью облегчить статистические расчеты и на текущий момент является лидирующим инструментом в данной отрасли.

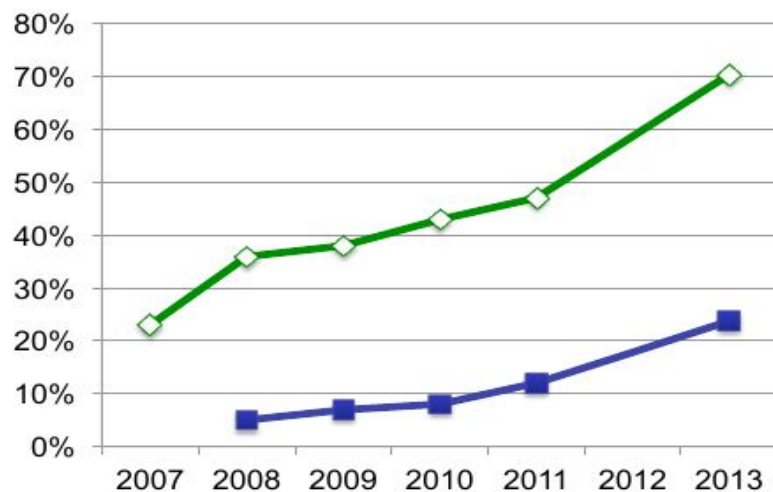


Рисунок 1. Rexter Analytics: взрывной рост в использовании R: в 2013 используют 70% опрошенных, как основной инструмент - 24%

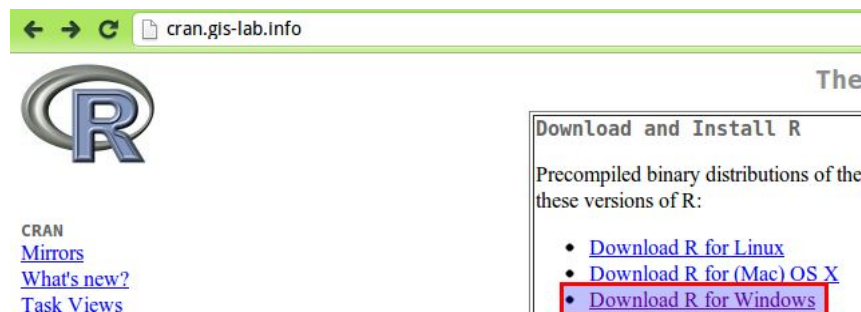
На текущий момент R — это часть профессиональной компетенции для любого специалиста, использующего в своей работе статистическую обработку данных.

Гибкость языка программирования, плюс опережающая по отношению к остальным пакетам, разработка алгоритмов для реализации новейших методов представляют пользователю реально огромные возможности по обработке статистических данных.

Визуализация результатов обработки, которая может быть получена с помощью R может быть сделана на высочайшем уровне.

### 2. Установка R

Если Вы — пользователь Windows, для установки R загрузите дистрибутив языка на одном из зеркал (допустим, <http://cran.gis-lab.info/>).



В случае ОС семейства Linux — используйте репозитории CRAN, разработчики рекомендуют использовать последние версии языка, недоступные в официальных.

Дополнительно рекомендуется установить среду быстрой разработки Rstudio (<http://www.rstudio.com/>).



Независимо от операционной системы Вам потребуется скачать

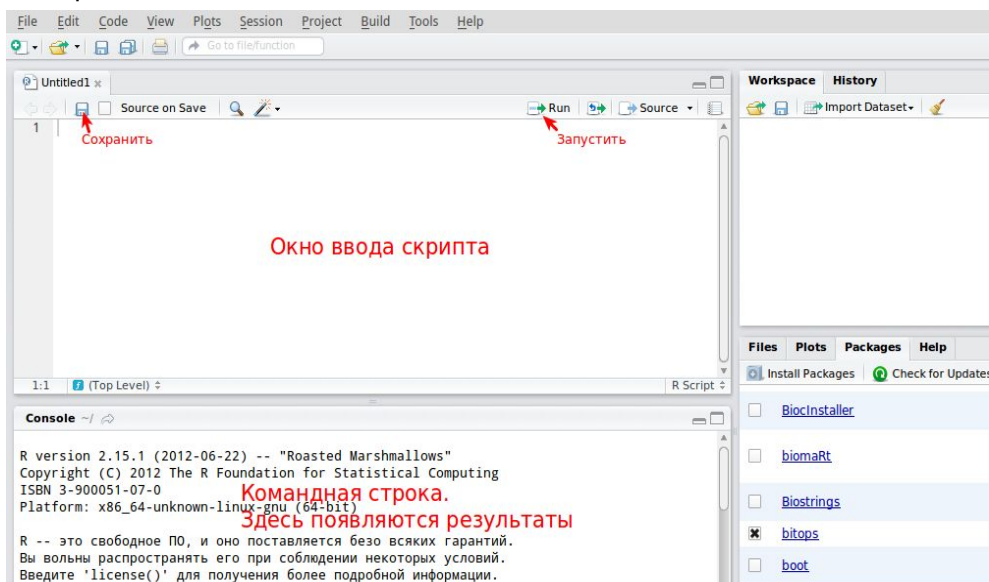
дистрибутив с сайта и установить на компьютер.

### 3 Конфигурирование среды

Для выполнения лабораторной работы загрузите ранее установленную на компьютере среду Rstudio.

Работа в данной IDE предполагает оформление кода в виде скрипта и отладку в пошаговом режиме, либо в режиме выполнения скрипта целиком.

Скрипт вводится в отдельный редактор, процедура выполнения отображается в консоли



- **Новый фрейм для ввода скрипта** открывается с помощью команды **File → New → R Script** главного меню.
- **Выполняется только выделенный фрагмент скрипта, либо та его строка, в которой находится курсор.** Горячая клавиша — **Ctrl+Enter**.
- **Очистка окна консоли (командной строки)** производится по

сочетанию **Ctrl+I**

Для работы в конкретном каталоге, называемом домашним, необходимо выполнить команду главного меню **Session → Set Working Directory → Choose directory**. В этот каталог будут сохраняться скрипты, он будет предлагаться изначально в диалогах открытия и сохранения файлов.

### 4 Анализ данных

Имеется исходный набор данных зависимости освещённости и тока от напряжения, полученный в результате проведённого эксперимента.

Исследовались лампы накаливания и люминесцентные лампы. Напряжение изменялось с помощью ЛАТР в пределах от 180 до 255 В.

Таблица данных имеет следующую структуру:

	1	2	3	4	5
1	U	En	In	EI	II
2	180	524	0,236	250	0,011
3	185	565	0,24	251	0,012
4	190	597	0,243	266	0,013
5	195	653	0,247	267	0,014
6	200	686	0,25	265	0,015
7	205	727	0,253	268	0,015
8	210	782	0,257	269	0,016
9	215	820	0,26	270	0,017
10	220	819	0,266	276	0,018
11	225	891	0,267	276	0,018
12	230	960	0,271	278	0,019
13	235	1050	0,276	278	0,02
14	240	1099	0,28	279	0,021
15	245	1167	0,283	279	0,021
16	250	1260	0,287	280	0,022
17	255	1330	0,291	280	0,023

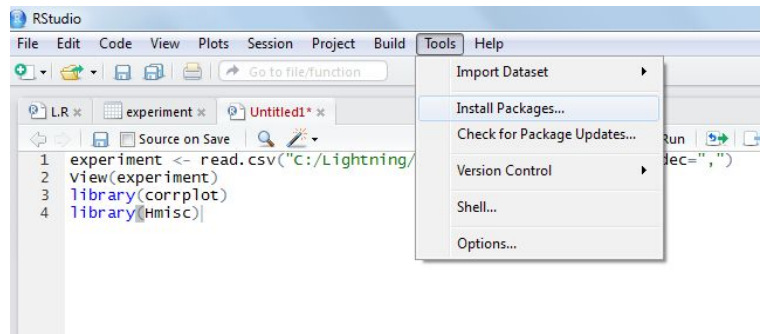
В первом столбце расположена информация об изменении напряжении, втором -освещённость лампы накаливания, третьем -сила тока для лампы накаливания, четвертом -освещённость люминесцентной лампы, пятом -сила тока для люминесцентной лампы.

Изучим полученные результаты.

Шаг 1. С помощью команды `read.csv` загружаем имеющийся файл данных, и присваиваем ему имя `experiment`:

```
1 experiment <- read.csv("c:/Lightning/experiment.csv", sep=";", dec=",")
2 view(experiment)
```

Шаг.2 Загружаем библиотеки :



Шаг 3.

1. Наш эксперимент-это некая система показаний. Требование системности означает, что между показаниями существуют связи, которые можно обнаружить в ходе исследования. Определение корреляции позволит оценить качество эксперимента. Благодаря такому анализу можно будет сделать «чистку» -избавить экспериментальные данные от данных, нарушающих его системные свойства.

Типы корреляции:

Типы шкал		Мера связи
Переменная X	Переменная Y	
Интервальная или отношений	Интервальная или отношений	Коэффициент Пирсона
Ранговая, интервальная или отношений	Ранговая, интервальная или отношений	Коэффициент Спирмена
Ранговая	Ранговая	Коэффициент Кендалла
Дихотомическая	Дихотомическая	Коэффициент $\phi$ , четырехполевая корреляция
Дихотомическая	Ранговая	Рангово-бисериальный коэффициент
Дихотомическая	Интервальная или отношений	Бисериальный коэффициент
Интервальная	Ранговая	Не разработан

2. Построим корреляционную матрицу посредством команды `cor()`:

```
5 cor(experiment)
```

Полученная мера связи - коэффициент корреляции, изменяющийся в пределах от -1.00 до +1.00. Обратите внимание на крайние значения коэффициента корреляции. Значение -1.00 означает, что переменные имеют строгую отрицательную корреляцию. Значение +1.00 означает, что переменные имеют строгую положительную корреляцию. Значение коэффициента равного нулю означает отсутствие корреляции, в пределах (0.7-0.8)-значимый, (0.5-1)- сильный. (Отметим, что в случае нелинейной связи коэффициент корреляции может оказаться близким к нулю, даже при довольно сильной связи.)

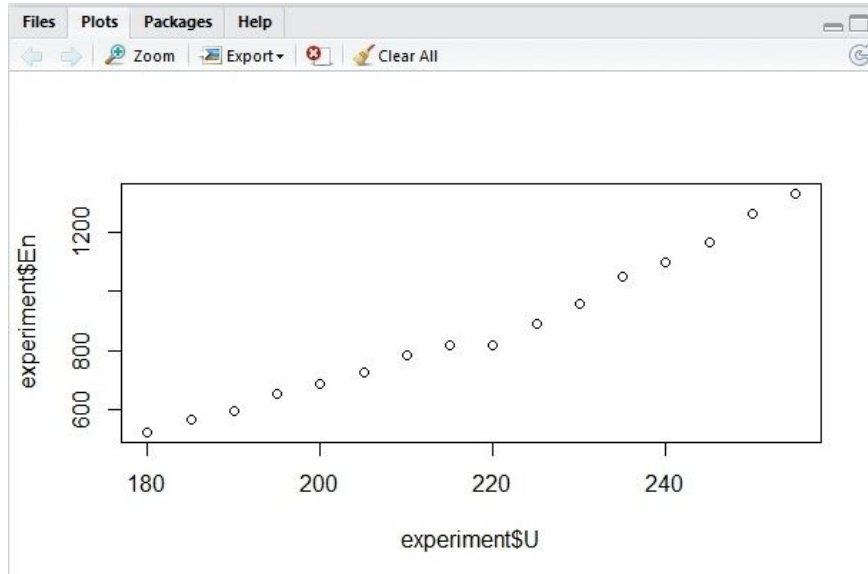
```
> cor(experiment)
      U      En      In      E1      I1
U  1.0000000  0.9878582  0.9990142  0.9131600  0.9967512
En  0.9878582  1.0000000  0.9897395  0.8599050  0.9814911
In  0.9990142  0.9897395  1.0000000  0.9069284  0.9969135
E1  0.9131600  0.8599050  0.9069284  1.0000000  0.9246104
I1  0.9967512  0.9814911  0.9969135  0.9246104  1.0000000
```



### Какие выводы вы можете сделать?

Шаг 4. Рассмотрим графички зависимости освещенности от напряжения с помощью команды plot():

```
6 plot(experiment$U, experiment$En)
```



### Какой вид связи вы видите?

Шаг 5. Для установления обычной линейной модели изменения En воспользуемся функцией lm(), присвоив результат переменной nakalivanie:

```
7 nakalivanie<-lm(experiment$En~experiment$U)
8 summary(nakalivanie)
```

Команда summary() используется для вывода сводных результатов, и позволяет получить больше деталей.

Давайте посмотрим на результаты:

```
> nakalivanie<-lm(experiment$En~experiment$U)
> summary(nakalivanie)

Call:
lm(formula = experiment$En ~ experiment$U)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-77.690 -16.116  -2.625   21.022   68.404

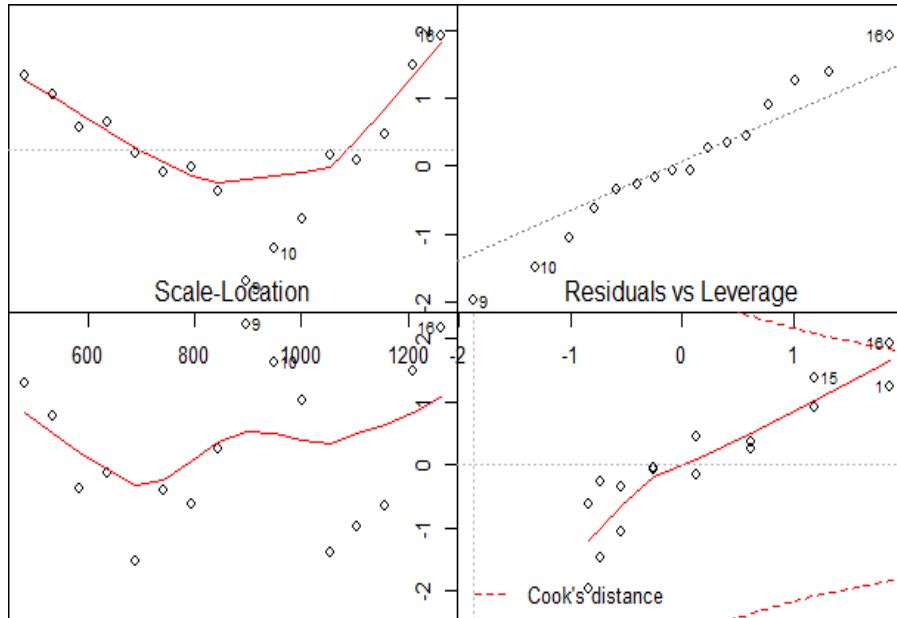
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1397.0044    95.8459  -14.58 7.44e-10 ***
experiment$U   10.4259     0.4382   23.79 1.01e-12 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 40.4 on 14 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9759, Adjusted R-squared:  0.9741
F-statistic: 566 on 1 and 14 DF, p-value: 1.01e-12
```

### Что вы видите? На что указывает R-squared?

Шаг 6. Результаты построения модели можно посмотреть на графике, воспользовавшись командой plot()-это позволит получить графики четырёх участков (введя в консоль команду par(mfrow=c(2;2)), все графики будут располагаться в одном графическом окне одновременно):

```
9 plot(experiment$U, experiment$En)
```



Чтобы понять вывод ознакомьтесь с материалом <http://stats.stackexchange.com/questions/58141/interpreting-plot-lm>

Шаг 7. Посмотрим на линейную модель трёх переменных  $E_n \sim I_n + U$ :

```
10 nakalivanie2<-lm(experiment$En~experiment$U+experiment$In)
11 summary(nakalivanie2)
```

```
> nakalivanie2<-lm(experiment$En~experiment$U+experiment$In)
> summary(nakalivanie2)
```

```
Call:
lm(formula = experiment$En ~ experiment$U + experiment$In)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-103.612  -11.599   2.561   12.016   53.781

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -3578.969   1333.694  -2.684  0.0188 *
experiment$U    -4.850     9.325  -0.520  0.6117
experiment$In 20934.836  12766.592   1.640  0.1250
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 38.16 on 13 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.98, Adjusted R-squared:  0.9769
F-statistic: 318.5 on 2 and 13 DF, p-value: 9.049e-12
```

Шаг 8. Зависимость между  $E_n$  и  $I_n$  будет следующая:

```
12 nakalivanie<-lm(experiment$En~experiment$In)
13 summary(nakalivanie)
```

```

> nakalivanie<-lm(experiment$En~experiment$In)
> summary(nakalivanie)

Call:
lm(formula = experiment$En ~ experiment$In)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-95.421 -10.371  -0.559   14.225   58.056

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -2889.6      145.4  -19.88 1.17e-11 ***
experiment$In 14300.9       551.8   25.92 3.12e-13 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 37.16 on 14 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9796, Adjusted R-squared:  0.9781
F-statistic: 671.7 on 1 and 14 DF, p-value: 3.125e-13

```

Шаг 9. Чтобы оценить качество модели можно применить дисперсионный анализ с помощью функции anova():

```

14 anova(nakalivanie2)

> anova(nakalivanie2)
Analysis of Variance Table

Response: experiment$En
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
experiment$U  1 923942  923942 634.329 2.036e-12 ***
experiment$In  1   3917    3917   2.689   0.125
Residuals    13  18935    1457
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

### ● Что означают полученные результаты?

Шаг 10. Так как на графиках отчетливо виден скачок на уровне 220В, для более подробного анализа разобьем набор данных, задав условие <220В и >=220В.

```

15 nakalivanieless220<-lm(experiment$En[experiment$U<220]~experiment$U[experiment$U<220])
16 nakalivaniemore220<-lm(experiment$En[experiment$U>=220]~experiment$U[experiment$U>=220])
17 summary(nakalivanieless220)
18 summary(nakalivaniemore220)

```

Шаг 12. Самостоятельно выполните анализ полученных результатов и проведите исследование зависимости EI от U и II.

## 5 Самостоятельно

1. Изучите серию материалов «Протокол разведочного анализа данных» ([http://r-analytics.blogspot.ru/2012/07/blog-post\\_20.html#.Urnz85BdWYg](http://r-analytics.blogspot.ru/2012/07/blog-post_20.html#.Urnz85BdWYg))
2. Проведите построения по статьям «Базовые графические возможности R: точечные диаграммы Кливленда» ([http://r-analytics.blogspot.de/2011/11/r\\_11.html#.Urn37JbDWYg](http://r-analytics.blogspot.de/2011/11/r_11.html#.Urn37JbDWYg)) и «Протокол разведочного анализа данных: выявление характера связи между переменными» ([http://r-analytics.blogspot.de/2012/07/blog-post\\_08.html#.Urn3rJbDWYg](http://r-analytics.blogspot.de/2012/07/blog-post_08.html#.Urn3rJbDWYg)). Оформите отчет по проведенным расчетам.