8 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$H(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{8.1}$$

Решением дифференциального уравнения является функция $x(t)$, которая обращает уравнение в тождество.

Системой дифференциальных уравнений n-го порядка называется система вида:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{8.2}$$

Решение системы - вектор который обращает уравнения системы (8.2) в тождества:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (8.3).$$

Дифференциальные уравнения и системы имеют бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга константами. Для однозначного определения решения требуется задать дополнительные *начальные* или *граничные условия*. Количество таких условий должно совпадать с порядком дифференциального уравнения или системы. В зависимости от вида дополнительных условий в дифференциальных уравнениях различают: *задачу Коши* все дополнительные условия заданы в одной (чаще начальной) точке интервала; *краевую задачу* дополнительные условия указаны на границах интервала.

Большое количество уравнений может быть решено точно. Однако есть уравнения, а особенно системы уравнений, для которых точное решение записать нельзя. Такие уравнения и системы решают при помощи численных методов. Так же численные методы применяют, если для уравнений с известным аналитическим решением требуется найти числовое значение при определенных исходных данных.

Для решения дифференциальных уравнений и систем в Sciab предусмотрена функция:

```
[y,w,iw]=ode([type],y0,t0,t [,rtol [,atol]],f [,jac] [,w,iw])
```

для которой, обязательными входными параметрами являются: `y0` вектор начальных условий; `t0` начальная точка интервала интегрирования; `t` координаты узлов сетки, в которых происходит поиск решения; `f` внешняя функция, определяющая правую часть уравнения или системы уравнений (8.2); `y` вектор решений (8.3).

Таким образом, для того чтобы решить обыкновенное дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dt} = f(t, y), y(t_0) = y_0$, необходимо вызвать функцию `y=ode(y0,t0,t,f)`.

Рассмотрим необязательные параметры функции `ode`:

`type` - параметр с помощью которого можно выбрать метод решения или тип решаемой задачи, указав одну из строк: `adams` - применяют при решении дифференциальных уравнений или систем методом прогноза-коррекции Адамса; `stiff` - указывают при решении жестких задач; `rk` - используют при решении дифференциальных уравнений или систем методом Рунге_Кутта четвертого порядка; `rkf` - указывают при выборе пятиэтапного метода Рунге_Кутта четвертого порядка; `fix` - тот же метод Рунге_Кутта, но с фиксированным шагом;

`rtol`, `atol` - относительная и абсолютная погрешности вычислений, вектор, размерность которого совпадает с размерностью вектора `y`, по умолчанию `rtol`=0.00001, `atol`=0.0000001, при использовании параметров `rkf` и `fix` - `rtol`=0.001, `atol`=0.0001;

`jac` - матрица, представляющая собой якобиан правой части жесткой системы дифференциальных уравнений, задают матрицу в виде внешней функции вида `J=jak(t,y)`;

`w`, `iw` - векторы, предназначенные для сохранения информации о параметрах интегрирования, которые применяют для того, чтобы последующие вычисления выполнялись с теми же параметрами.

Рассмотрим использование функции на примере следующих задач.

ЗАДАЧА 8.1.

Решить задачу Коши $\frac{dx}{dt}+x=\sin(xt),\ x(0)=1.5.$

Перепишем уравнение следующим образом: $\frac{dx}{dt}=-x+\sin(xt),\ x(0)=1.5.$

График, моделирующий процесс, описанный заданным уравнением, представлен на рис. 8.1

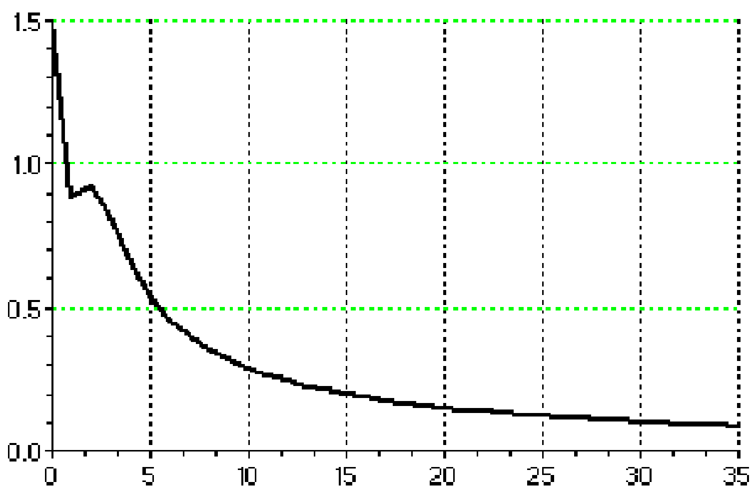

Рисунок 8.1. Решение дифференциального уравнения из задачи 8.1

Далее представим его в виде внешней функции и применим функцию `y=ode(x0,t0,t,f)`, в качестве параметров которой будем использовать

`f` - ссылка на предварительно созданную функцию $f(t, x)$;

`t` - координаты сетки;

`x0`, `t0` - начальное условие $x(0)$=1.5;

y - результат работы функции.

```
-->function yd=f(t,x),yd=-x+sin(t*x),endfunction;
-->x0=1.5;t0=0;t=0:1:35;
-->y=ode(x0,t0,t,f);
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.1

ЗАДАЧА 8.2.

Решить задачу Коши

$$x'=\cos(x\,y),$$
$$y'=\sin(x+t\,y),$$
$$x(0)=0, y(0)=0.$$

на интервале [0; 10].

Далее приведена функция, описывающая заданную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и команды Sciab необходимые для ее численного и графического решения (рис.8.2).

```
//Функция, описывающая систему дифференциальных уравнений
function dy=syst(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=cos(y(1)*y(2));
dy(2)=sin(y(1)+y(2)*t);
endfunction
//Решение системы дифференциальных уравнений
x0=[0;0];t0=0;t=0:1:10;y=ode(x0,t0,t,syst);
//Формирование графического решения
plot(t,y)
```

Листинг 8.2

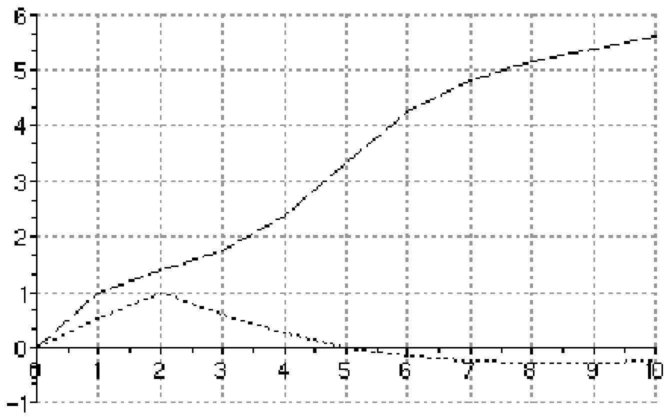

Рисунок 8.2. Решение задачи 8.2

ЗАДАЧА 8.3.

Найти решение задачи Коши для следующей жесткой системы:

$$\frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix}119.46 & 185.38 & 126.88 & 121.03\\ -10.395 & -10.136 & -3.636 & 8.577\\ -53.302 & -85.932 & -63.182 & 54.211\\ -115.58 & -181.75 & -112.8 & -199\end{pmatrix}X\ ;\ X(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

Решение системы:

```
-->B=[119.46 185.38 126.88 121.03;-10.395 -10.136 -3.636 8.577;
-->-53.302 -85.932 -63.182 -54.211;-115.58 -181.75 -112.8 -199];
-->function dx=syst1(t,x), dx=B*x,endfunction
-->function J=Jac(t,y),J=B,endfunction
-->x0=[1;1;1;1]; t0=0; t=0:0.01:5;
-->y=ode("stiff",x0,t0,t,syst1,Jac);
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.3

Графическое решение показано на рис. 8.3.

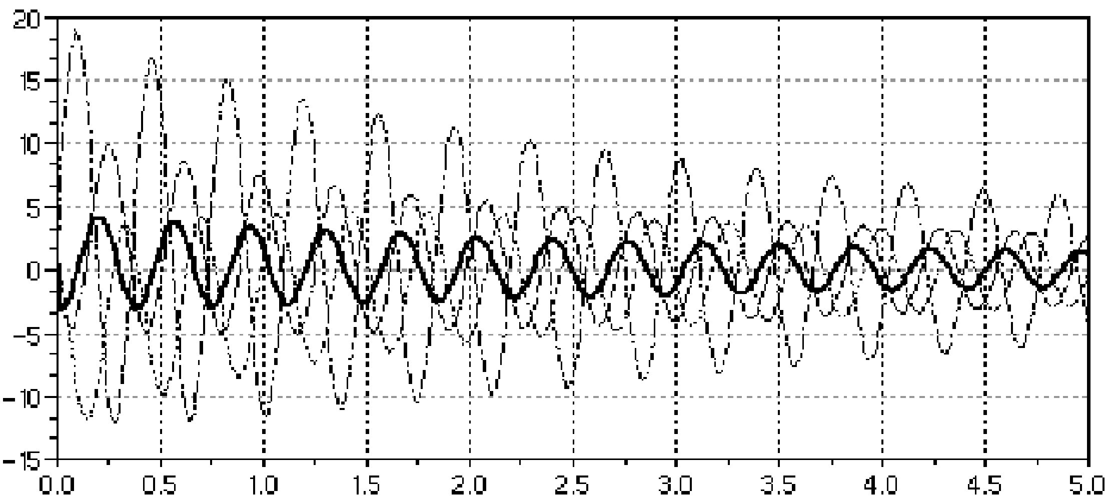

Рисунок 8.3. Графическое решение задачи 8.3

ЗАДАЧА 8.4.

Решить нелинейную жесткую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-7x_1+7x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=157x_1-1.15x_2x_3\\ \dfrac{dx_3}{dt}=0.96\,x_1x_2-8.36\,x_3\end{cases}\ ,\quad X(0)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

На рис. 8.4 показано решение системы на интервале [0; 2].

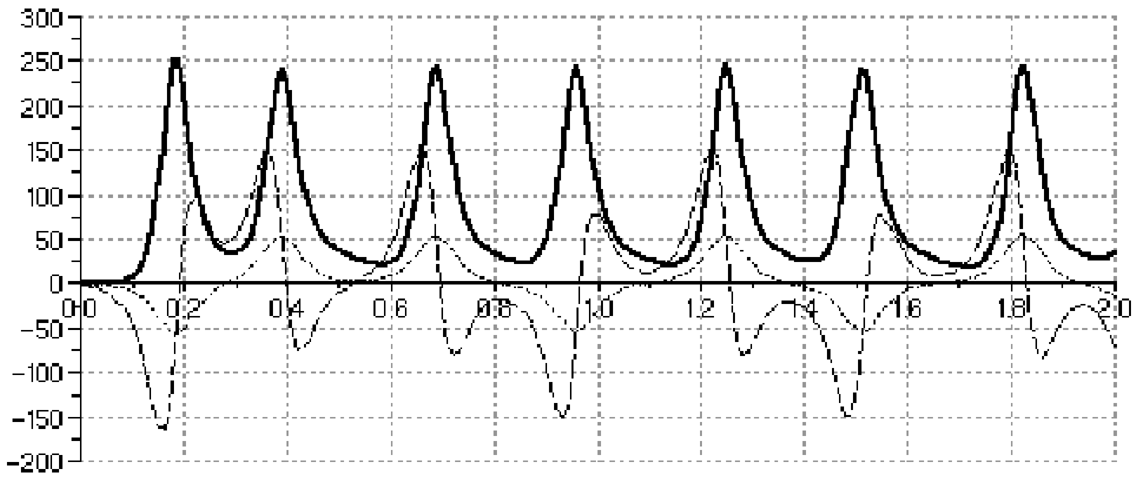

Рисунок 8.4. Графическое решение задачи 8.4

Команды Sciab необходимые для решения задачи:

```
function dx=syst2(t,x) //Функция задающая систему ОДУ
dx=zeros(3,1);
dx(1)=-7*x(1)+7*x(2);
dx(2)=157*x(1)+x(2)-1.15*x(1)*x(3);
dx(3)=0.96*x(1)*x(2)-8.36*x(3);
endfunction
-->>//Решение ОДУ
-->x0=[-1;0;1]; t0=0; t=0:0.01:2;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.4

ЗАДАЧА 8.5.

Решить следующую краевую задачу на интервале [0.25; 2]:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+13=e^{\sin(t)}, x(0.25)=-1, x'(0.25)=1.$$

Преобразуем уравнение в систему, сделав замену $y=\dfrac{dx}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}=-4\text{y}-13\text{x}+e^{\sin(t)}, \frac{dx}{dt}=y, y(0.25)=1, x(0.25)=-1.$$

Составим функцию вычисления системы и решим ее:

```
function F=FF(t,x)
F=[-4*x(1)-13*x(2)+exp(t);x(1)];
endfunction
-->//Решение системы дифференциальных уравнений
-->X0=[1;-1];t0=0.25;t=0.25:0.05:2;
-->y=ode("stiff",X0,t0,t,FF);
-->//Вывод графика решения
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.5

График решения приведен на рис. 8.5.

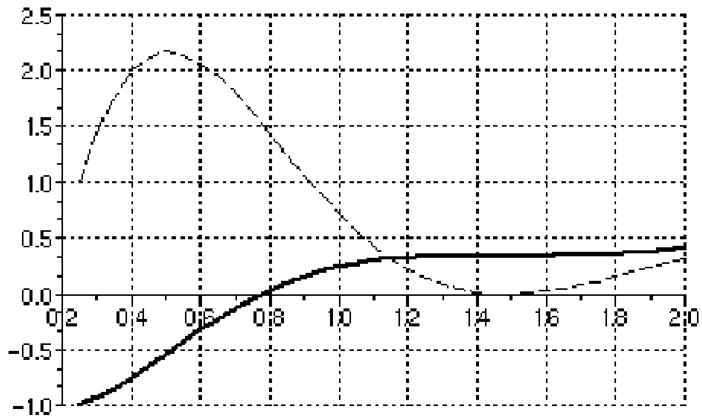

Рисунок 8.5. Решение задачи 8.5.