7 Численное интегрирование и дифференцирование

В функциях интегрирования и дифференцирования в Scilab реализованы различные численные алгоритмы.

7.1 Интегрирование по методу трапеций

В Scilab *численное интегрирование по методу трапеций* реализовано с помощью функции `inttrap([x,]y)`. Эта функция вычисляет площадь фигуры под графиком функции *y*(*x*), которая описана набором точек (`x`, `y`). Параметр `x` является необязательным. Для функции `inttrap(y)` элементы вектора `x` принимают значения номеров элементов вектора `y`.

ЗАДАЧА 7.1

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx$.

Этот интеграл легко сводится к табличному $\int\limits_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx = \dfrac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}$, поэтому вычислить его по формуле Ньютона Лейбница[1] не составит труда:

```
-->a=5;b=13;
-->I=1/3*(2*b-1)^(3/2)-1/3*(2*a-1)^(3/2)
 I  =  32.666667
```

Листинг 7.1

Теперь применим для отыскания заданного определенного интеграла *метод трапеций*[2]. Рассмотрим несколько вариантов решения данной задачи. В первом случае интервал интегрирования делится на отрезки с шагом один, во втором 0.5 и в третьем 0.1. Не трудно заметить, что чем больше точек разбиения, тем точнее значение искомого интеграла:

```
-->x=a:b;y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.655571
-->h=0.5; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.66389
-->h=0.1; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
```

1 Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x) = F(b) - F(a)$.

2 Для вычисления интеграла методом трапеций участок интегрирования разбивают на определенное количество равных отрезков, каждую из полученных криволинейных трапеций заменяют прямолинейной и вычисляют приближенное значение интеграла как сумму площадей этих трапеций.

```
    32.666556
```

Листинг 7.2

Далее в листинге 7.3 приведен пример использования функции `inttrap` с одним аргументом. Как видим, в первом случае значение интеграла вычисленного при помощи этой функции не точно и совпадает со значением, полученным функцией `inttrap(x,y)` на интервале [5; 13] с шагом 1. То есть мы нашли сумму площадей восьми прямолинейных трапеций с основанием *h*=1 и боковыми сторонами, заданными вектором `y`. Во втором случае, при попытке увеличить точность интегрирования, значение интеграла существенно увеличивается. Дело в том что, уменьшив шаг разбиения интервала интегрирования до 0.1, мы увеличили количество элементов векторов `x` и `y` и применение функции `inttrap(y)` приведет к вычислению суммы площадей восьмидесяти трапеций с основанием *h*=1 и боковыми сторонами, заданными вектором `y`. Таким образом, в первом и втором примерах вычисляются площади совершенно разных фигур.

```
-->x=a:b;y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(y)
 ans  =     32.655571
-->h=0.1;x=a:h:b;y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(y)
 ans  =     326.66556
```

Листинг 7.3

7.2 Интегрирование по квадратуре

Методы трапеций являются частными случаями *квадратурных формул Ньютона Котеса*, которые, вообще говоря, имеют вид

$$\int_a^b y dy = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i \tag{7.1}$$

где H_i это некоторые константы называемые постоянными Ньютона Котеса .

Если для (7.1) принять *n*=1, то получим *метод трапеций*, а при *n*=2 *метод Симпсона*. Эти методы называют квадратурными методами низших порядков. Для *n*>2 получают *квадратурные формулы Ньютона Котеса высших порядков*. Вычислительный алгоритм квадратурных формул реализован в Scilab функцией:

```
integrate(fun, x, a, b, [,er1 [,er2]])
```

где `fun` функция , задающая подынтегральное выражение в символьном виде ; `x` переменная интегрирования, так же задается в виде символа; `a`, `b` пределы интегрирования , действительные числа; `er1` и `er2` ,отражающие абсолютную и относительную точность вычислений (действительные числа).

ЗАДАЧА 7.2

Вычислить интеграл из задачи 7.1

Решение показано в листинге 7.4.

```
-->integrate('(2*x-1)^0.5','x',5,13)
 ans  =     32.666667
```

Листинг 7.4

7.3 Интегрирование внешней функции

Наиболее универсальной командой интегрирования в Scilab является:

```
[I,err]=intg(a, b, name [,er1 [,er2]])
```

где `name`   имя функции ,задающей подынтегральное выражение ;здесь функция может быть задана в виде набора дискретных точек (как таблица) или с помощью внешней функции; `a` и `b`   пределы интегрирования ; `er1` и `er2`   абсолютная и относительная точность вычислений (необязательные параметры).

ЗАДАЧА 7.3

Вычислить интеграл из задачи 7.1

Решение показано в листинге 7.5.

```
-->deff('y=G(x)','y=sqrt(2*x-1)'); intg(5,13,G)
 ans  =     32.666667
```

Листинг 7.5

ЗАДАЧА 7.4

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(3+\sin(t))}}\,dt$.

Численное решение интеграла показано в листинге 7.6.

```
-->function y=f(t),y=t^2/sqrt(3+sin(t)),endfunction;
-->[I,er]=intg(0,1,f)
 er  =  1.933D-15
 I  =
        0.1741192
```

Листинг 7.6

7.4 Приближенное дифференцирование, основанное на интерполяционной формуле Ньютона

Идея численного дифференцирования заключается в том, что функцию y(x), заданную в равноотстоящих точках x_i (i = 0, 1, ..., n) отрезка [a, b] с помощью значений $y_i=f(x_i)$ приближенно заменяют интерполяционным полиномом Ньютона, построенном для системы узлов x_0, x_1, ..., x_k (k≤n), и вычисляют производные $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$ и т.д.

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}-...), \qquad (7.2)$$

На практике приближенное дифференцирование применяют в основном для функций заданных в виде таблицы.

В Scilab численное дифференцирование реализовано командой `dy=diff(y [,n ])`, где `y`   значения функции $y(x)$ в виде вектора вещественных чисел, `n`   порядок дифференцирования. Результат работы функции - вектор вещественных чисел `dy`, представляющий собой разности порядка `n` интерполяционного полином Ньютона Δy, Δ_2y, ..., Δ_ky. Рассмотрим работу функции на примере.

ЗАДАЧА 7.5

Найти y'(50) функции y=lg(x), заданной в виде таблицы.

Решение данной задачи с комментариями представлено в листинге 7.7.

```
-->h=5;x=50:5:65;
-->y=log10(x)
 y  =  1.69897    1.7403627    1.7781513    1.8129134
-->dy=diff(y)
 dy  = 0.0413927    0.0377886    0.0347621
-->dy2=diff(y,2)
 dy2  =  - 0.0036041  - 0.0030265
-->dy3=diff(y,3)
 dy3  =  0.0005777
-->//Приближенное значение y'(50) по формуле (7.2)
-->Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h
 Y  =  0.0086775
-->//Значение y'(50) для lg'(x)=1/ln(10)/x
-->1/log(10)/x(1)
 ans  =     0.0086859
-->//Приближенное значение y'(x), x=50,55,60 (7.2)
-->Y=(dy-dy2(1:$-1)/2+dy3(1:$-2)/3)/h
 Y  =   0.0086389    0.0079181    0.0073128
-->//Значение y'(x), x=50,55,60, для lg'(x)=1/ln(10)/x
-->(1/log(10))./x(1:$-1)
 ans  =  0.0086859    0.0078963    0.0072382
```

Листинг 7.7

7.5 Вычисление производной функции в точке. Приближенное вычисление частных производных.

Более универсальной командой дифференцирования является команда

`g=numdiff(fun,x)`

здесь `fun` - имя функции, задающей выражение для дифференцирования. Функция должна быть задана в виде `y=fun(x [, p1, p2,..., pn])`, где `x` - переменная по которой будет проводится дифференцирование. Если параметры `p1`, `p2`,..., `pn` присутствуют в описании функции, то должны быть обязательно определены при вызове, например так `g=numdiff(list(fun,p1,p2,..pn),x)`.

Результат работы функции матрица $g_{ij}=\dfrac{df_i}{dx_j}$.

Рассмотрим несколько примеров.

ЗАДАЧА 7.6

Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=(x+2)^3+5x$.

Листинг 7.8 содержит решение данной задачи.

```
-->function  f=my(x), f=(x+2)^3+5*x, endfunction;
-->numdiff(my,1)
 ans  = 32.
-->x=1;3*(x+2)^2+5
 ans  = 32.
```

Листинг 7.8

ЗАДАЧА 7.7

Вычислить $f'(x)$ в точках 0, 1, 2, 3 для $f(x)=(x+2)^3+5x$.

Решение:

```
-->v=0:3;
-->numdiff(my,v)
 ans  =
    17.    0.     0.           0.
    0.     32.    0.           0.
    0.     0.     52.999999    0.
    0.     0.     0.           80.000002
-->function  f1=my1(x), f1=3*(x+2)^2+5, endfunction;
-->my1(v)
 ans  =     17.    32.    53.    80.
```

Листинг 7.9

ЗАДАЧА 7.8

Задана функция многих переменных $y(x_1, x_2, x_3)=x_1 x_2^{x_3}+x_1^2 x_3$. Вычислить $\frac{dy}{dx_1}, \frac{dy}{dx_2}, \frac{dy}{dx_3}$ в точке (1, 2, 3).

Решение задачи представлено в листинге 7.10.

```
-->function [Y]=f(X), Y=X(1)*X(2)^X(3)+X(1)^2*X(3),endfunction
-->X=[1 2 3];
-->numdiff(f,X)
 ans  =     14.    12.    6.5451775
-->//--------------------------------
-->function [Y]=f1(X),
Y(1)=X(2)^X(3)+2*X(1)*X(3),
Y(2)=X(1)*X(3)*X(2)^(X(3)-1),
Y(3)=x(1)*X(2)^X(3)*log(X(2))+X(1)^2,
endfunction
-->f1(X)
 ans  =
    14.
    12.
    6.5451774
```

Листинг 7.10